

**Über die Beschränktheit der Energienorm bei
Evolution der Dirac-, Weyl- und Maxwellfelder in
gekrümmten Raumzeiten**

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von

Andreas de Vries

Bochum, im Oktober 1993

Referent: Prof. Dr. Reinhold Böhme
Korreferent: Prof. Dr. Theodor Schmidt-Kaler
Datum der Disputation: 26.01.1994

Veröffentlicht:
Universitätsverlag Dr. N. Brockmeyer, Bochum 1994 (ISBN 978-3-81960-248-1)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Spinoren über gekrümmten Raumzeiten	7
1.1 Spinoralgebra	7
1.2 Symmetrische Spinoren	10
1.3 Die Infeld-van der Waerden-Symbole; Spinoren und Welttensoren	11
1.4 Differentiation von Spinoren	17
1.5 Die Beziehung zwischen Spinor- und Tetradenkalkül	20
2 Spinwellen	22
2.1 Uhren und Maßstäbe in der Allgemeinen Relativität	22
2.2 Spinwellenoperatoren über Raumzeiten	25
2.3 Der Dirac-Operator	28
2.4 Masselose Spinwellenoperatoren	34
a) Der Weyl-Operator	34
b) Der Maxwell-Operator	35
3 Anwendungen	40
3.1 Die Kerr-Newman-Raumzeit	40
3.2 Die Robertson-Walker-Kosmen	45
A Anhang	49
A.1 Die Spinkoeffizienten (3.25) der Robertson-Walker-Raumzeit	49
A.2 Thermodynamik Schwarzer Löcher und Superradianz	50
A.3 Der Penrose-Prozeß	54
A.4 Teukolskys Herleitung der Superradianz für die Kerr-Raumzeit ($Q = 0$)	56
A.5 Spin-Strukturen über Raumzeiten	60
Literaturverzeichnis	61

Einleitung

»Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stund' an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.« Als Hermann Minkowski [36] mit diesen Worten seinen berühmten Vortrag »Raum und Zeit« am 21. September 1908 in Köln einleitete, wußte noch niemand, daß er durch seine neue geometrische Betrachtungsweise bereits den Keim der Allgemeinen Relativität Einsteins entwickelt hatte. In der Allgemeinen Relativität wird die Raumzeit durch eine vierdimensionale (parakompakte glatte) Mannigfaltigkeit \mathcal{M} beschrieben, die mit einem metrischen Tensor g der Signatur -2 , d.h. $(+, -, -, -)$, versehen ist.

Gerade wegen der »Art Union« von Raum und Zeit haben funktionalanalytische Methoden bisher recht spärlich Anwendung im Rahmen der Allgemeinen Relativität gefunden, im Gegensatz z.B. zum Fall der Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit positiv definiter Metrik. Die vorliegende Arbeit gibt jedoch hinreichende Kriterien an, für die die aus der Speziellen Relativität wohlbekannten unquantisierten Spinwellengleichungen des Dirac-, Weyl- und Maxwellfeldes, umgeschrieben als Evolutionsgleichungen, in die gekrümmte Welt »hinübergerettet« werden können:

- (i) Die vierdimensionale offene Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist parallelisierbar; dies sichert die globale Existenz von Spinoren.
- (ii) Die zeitartige kontravariante Komponente des metrischen Tensors ist positiv für alle Punkte der zu betrachtenden Karte (\mathcal{U}, φ) , $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^4$, d.h. es gilt

$$g^{00}(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

Dies ist *nicht* äquivalent zu der in diesem Zusammenhang üblichen Voraussetzung $g_{00}(x) > 0$, wie bereits das Beispiel der Ergosphäre der Kerr-Newman-Raumzeit zeigt, vgl. Gleichung (3.7) und Lemma 3.1. Diese Bedingung ist allerdings unter physikalisch sehr plausiblen Voraussetzungen erfüllt, wie Lemma 2.4 zeigt.

- (iii) Die Hyperfläche

$$U_t = (x^0 = ct = \text{const}, x^1, x^1, x^3)$$

der Kartenumgebung $U = \varphi(\mathcal{U})$ ist zusammenhängend.

Mit (i), (ii), und (iii) lassen sich die Spinwellengleichungen für $n \in \{2, 3, 4\}$ umschreiben zu einer Evolutionsgleichung der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = - \sum_{\nu=1}^3 \alpha^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi + \beta \psi$$

mit den vier komplexen $(n \times n)$ -Matrizen $\alpha^\nu(t, \mathbf{x})$, $\nu = 1, 2, 3$, $\beta(t, \mathbf{x})$ für $\psi \in C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^n)$. Bezeichnen wir für $s = \frac{n-1}{2}$ die Operatoren auf der rechten Seite mit $L^{(s)}$, so ist $A := L^{(\frac{3}{2})}$ der

Dirac-, $L^{(\frac{1}{2})}$ der Weyl- und $L^{(1)}$ der Maxwell-Operator, und es gilt $\partial\psi/\partial t = L^{(s)}\psi$. Für jedes t bildet $C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^n)$ mit dem Skalarprodukt

$$(\phi, \psi)_s = \int_{U_t} \phi^* \cdot \psi \cdot \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

$g = |\det(g_{ij})|$, einen Prähilbertraum. In einer gekrümmten Raumzeit sind die Matrizen α^ν ($\nu = 1, 2, 3$) i.a. nicht Hermitesch und bilden damit kein symmetrisches hyperbolisches System nach Friedrichs [38, §6]. In diesen Prähilberträumen lassen sich die Realteile $\text{Re}(\psi, L^{(s)}\psi)_s$ abschätzen, die in gekrümmten Raumzeiten *nicht* verschwinden wie in der flachen Minkowski-Welt. Diese Abschätzungen gelingen im wesentlichen, da für jedes $\nu = 1, 2, 3$ die Matrix α^ν als Produkt von zwei Hermiteschen Matrizen dargestellt werden kann. Da nun für die durch das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_s$ induzierte Norm $\|\cdot\|$, die *Energienorm*, die Beziehung $\frac{\partial}{\partial t} \|\psi\|^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}, \psi\right)_s + \left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_s = 2\text{Re}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}, \psi\right)_s$ gilt, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\psi\|^2 = 2\text{Re}(\psi, L^{(s)}\psi)_s.$$

Als erstes bemerkenswertes Resultat dieser Betrachtungen ergibt sich, daß für die Kerr-Newman-Raumzeit, d.h. einem geladenen rotierenden schwarzen Loch, sowohl der Dirac- als auch der Weyl-Operator dissipativ ist, d.h. $\text{Re}(\psi, L^{(s)}\psi)_s \leq 0$ gilt, während der Realteil des Maxwell-Operators lediglich durch eine nichtnegative obere Schranke abgeschätzt werden kann, die dann und nur dann verschwindet, wenn das schwarze Loch nicht rotiert, Korollare 3.2, 3.3 und 3.4. Dieses Ergebnis stellt eine Verallgemeinerung früherer Arbeiten von Zel'dovich [61] und Teukolsky [55] dar, die für elektromagnetische Wellen bestimmter Moden in der Kerr-Raumzeit einen Verstärkungseffekt, die Superradianz, berechneten, und stimmt mit den Betrachtungen zur Thermodynamik schwarzer Löcher von Hawking [25] überein.

Außerdem ergibt sich, daß sich die Realteile der Operatoren für die Robertson-Walker-Kosmen, der allgemeinen Klasse nicht-stationärer räumlich isotroper Raumzeiten, in einem expandierenden Universum sämtlich als dissipativ erweisen, wobei die Schranken der Energienorm von der Hubble-Konstanten abhängen.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert. Nach einer Idee von Penrose [44], vgl. auch [45], wird im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit für eine parallelisierbare Mannigfaltigkeit mit einigen sehr allgemeinen topologischen Voraussetzungen die Metrik g als Konsequenz der Spin-Struktur hergeleitet. Wesentlich dafür sind die Infeld-van der Waerden-Symbole, die bijektiv mit einer (komplexen) Nulltetrad zusammenhängen, und die eine Art Bindeglieder zwischen der Spinor- und Tensorgeometrie sind.

Im zweiten Kapitel werden mit Hilfe der Infeld-van der Waerden-Symbole die Dirac-, Weyl- und Maxwell-Gleichungen einer gekrümmten Raumzeit konstruiert. Diese Gleichungen beschreiben jeweils (unquantisierte) Testfelder mit Spin $\frac{1}{2}$ bzw. 1 in der Mannigfaltigkeit (\mathcal{M}, g) . Sie sind lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Unter der Einschränkung an die Koordinaten von \mathcal{M} , daß die »zeitartigen« kontravarianten Komponenten von g positiv sind für alle Punkte der Karte, $g^{00}(x) > 0$, lassen sich die Spinwellengleichungen umschreiben zu Evolutionsgleichungen. Kern der vorliegenden Arbeit bilden das Lemma 2.8 und die Sätze 2.25, 2.29 und 2.36, mit denen die Realteile der jeweiligen Operatoren abgeschätzt werden können.

Im dritten Kapitel werden die Resultate aus dem vorherigen zunächst auf die Kerr-Newman-Raumzeit angewendet, die ein elektrisch geladenes rotierendes schwarzes Loch darstellt. Es zeigt sich das bemerkenswerte Resultat, daß der Dirac- und der Weyl-Operator jeweils dissipativ ist, während der Realteil des Maxwell-Operators lediglich durch eine nichtnegative obere Schranke abgeschätzt werden kann, die dann und nur dann verschwindet, wenn das schwarze

Loch statisch ist, d.h. nicht rotiert. Dieses Ergebnis ist in voller Übereinstimmung mit früheren Arbeiten von Zel'dovich [61] und Teukolsky [55], die für elektromagnetische Wellen bestimmter Moden in der Kerr-Raumzeit einen Verstärkungseffekt, Superradianz, berechneten, und mit den Betrachtungen der Thermodynamik schwarzer Löcher von Hawking [25]. Ferner werden die Realteile der Operatoren für die Robertson-Walker-Kosmen abgeschätzt, die sich in einem expandierenden Universum sämtlich als dissipativ erweisen.

Danksagung

Ich möchte an dieser Stelle dem Land Nordrhein-Westfalen danken, das mit einem Promotionsstipendium nach dem Graduiertenförderungsgesetz diese Arbeit unterstützt hat.

Ferner danke ich Herrn Prof. Dr. Böhme für die viele Zeit, die er mir mit Rat und Hilfe zur Seite stand, und für die Geduld, die er so oft behielt, auch wenn er mich schon zielstrebig in die Unwetter des „offenen Wassers“ zusteuern sah. Sehr zu Dank verpflichtet bin ich außerdem Herrn Prof. Dr. Schmidt-Kaler und Herrn Dr. Schulz, bei denen ich Kosmologie lernte, sowie Herrn Prof. Dr. Kaul, der mir durch seine Ansichten zur Kerr-Lösung das Verständnis dieser Raumzeit sehr erleichterte. Dank gebührt nicht zuletzt meinen Kollegen am Lehrstuhl, Martin Müller und Gerald Delvos für die aufschlußreichen und fruchtbaren Diskussionen, sowie Daniela Trompeter für den freundlichen Geist, den sie dem Lehrstuhl verlieh. Katrin Blümel danke ich für all die Unterstützung, die ich bei ihr fand. Sie alle und noch viele Ungenannte leisteten einen unschätzbaren Beitrag zur Vollendung dieser Arbeit.

Kapitel 1

Spinoren über gekrümmten Raumzeiten

Dieses Kapitel liefert eine kurze Einführung in die Analysis der Spinorfelder über einer vierdimensionalen parallelisierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{M} . Es wird ein Spinorbündel konstruiert, das mit Hilfe der Infeld-van der Waerden-Symbole, verallgemeinerten Pauli-Matrizen in krummlinigen Koordinaten, mit dem Tangentialbündel verknüpft wird. Insbesondere wird die Lorentz-Metrik und die Zeitorientierung abgeleitet von den Infeld-van der Waerden-Symbolen. Diese Idee geht zurück auf Penrose [44], vgl. auch [45]. Schließlich wird das einfache, für die Arbeit jedoch zentrale Lemma 1.29 bewiesen.

1.1 Spinoralgebra

The notion of spinors originates in the observation that a four-vector in Minkowski space can be represented equally by a Hermitean matrix and that a unimodular transformation in the complex two-dimensional space induces a Lorentz transformation in the Minkowski space.

Subrahmanyam Chandrasekhar (1983)

Sei \mathcal{M} eine vierdimensionale, parakompakte, offene C^k -Mannigfaltigkeit, $k \in \{2, 3, \dots\}$ [45, p. 212] oder [1, p. 309]. \mathcal{M} sei ferner zusammenhängend und parallelisierbar, d.h. es existiert ein globaler Schnitt des prinzipalen Vierbein-Bündels (*principal four-frame bundle*)

$$(E(\mathcal{M}), p, \mathcal{M}; GL(4, \mathbb{R}^4)).$$

Bemerkung 1.1. Die topologischen Einschränkungen an die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , die das Modell eines allgemeinen Gravitationsfeldes, d.h. eine *Raumzeit*, darstellen soll, sind physikalisch plausibel:

- (i) (*zusammenhängend*) Zwischen Punkten (»Ereignissen«) zweier verschiedener Zusammenhangskomponenten bestehen keinerlei Wechselwirkungen, sie stellen gewissermaßen zwei voneinander unabhängige »Universen« dar.
- (ii) (*parakompakt*) Die Parakompaktheit einer Mannigfaltigkeit ist hinreichend, um auf ihr eine Partition der Eins konstruieren und damit Analysis treiben zu können [13, p. 16].
- (iii) (*offen*) Kompakte Raumzeiten besitzen geschlossene zeitartige Kurven, d.h. Zeitmaschinen sind konstruierbar; dies widerspricht jedoch den Konzepten der Kausalität und des freien Willens [26].
- (iv) (*parallelisierbar*) Nach Geroch [20] besitzt eine raum- und zeitorientierbare offene Raumzeit genau dann eine Spin-Struktur, wenn sie parallelisierbar ist.

Folgerung 1.2. Da allgemein ein Prinzipalbündel trivial ist, wenn ein stetiger Schnitt existiert [13, pp. 132], ist das Vierbein-Bündel $(E(\mathcal{M}), p, \mathcal{M}; GL(4, \mathbb{R}^4))$ trivial,

$$E(\mathcal{M}) \cong \mathcal{M} \times GL(4, \mathbb{R}).$$

Ferner impliziert die Parallelisierbarkeit von \mathcal{M} bereits ihre Orientierbarkeit [53].

The bundle of frames is soldered to the base \mathcal{M} whereas in other gauge theories the bundle is rather loosely connected to \mathcal{M} .

Andrzej Trautman (1980)

Definition 1.3. Sei $x \in \mathcal{M}$ fest. Sei dann $\mathfrak{S}_x \cong \mathbb{C}^2$ ein zweidimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum mit einer symplektischen Bilinearform $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{S}_x \times \mathfrak{S}_x \rightarrow \mathbb{C}$, so daß $SL(2, \mathbb{C})$ isometrisch auf \mathfrak{S}_x wirkt; \mathfrak{S}_x heißt *Spinorraum* über x . Sei weiter $\mathfrak{S} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} (x, \mathfrak{S}_x) \cong \mathcal{M} \times \mathbb{C}^2$, und damit $(\mathfrak{S}, p, \mathcal{M}, \mathbb{C}^2; SL(2, \mathbb{C}))$ ein (triviales) komplexes Vektorraumbündel, das *Spinorbündel*. Die Schnitte dieses Bündels sind *Spinorfelder* der Valenz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ oder *kontravariante Spinorfelder*. Sei \mathfrak{S}_x^* der duale Vektorraum von \mathfrak{S}_x , und sei $(\mathfrak{S}^*, p, \mathcal{M}, \mathbb{C}^2; SL(2, \mathbb{C}))$ mit $\mathfrak{S}^* = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} (x, \mathfrak{S}_x^*)$ das duale Spinorbündel (*Cospinorbündel*). Die Schnitte dieses Bündels heißen *Spinorfelder* der Valenz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ oder *kovariante Spinorfelder*. Sei $\{\zeta_0, \zeta_1\}$ eine Basis von \mathfrak{S}_x , die *Spinorbasis* oder *Dyade*, und sei $\{\zeta^0, \zeta^1\}$ die duale Basis, d.h. es gilt

$$\langle \zeta^A, \zeta_B \rangle := \zeta^A(\zeta_B) = \delta^A_B. \quad (1.1)$$

In diesen Basen kann ein kontravarianter Spinor ξ bzw. ein kovarianter Spinor κ durch

$$\xi = \xi^A \zeta_A \quad \text{bzw.} \quad \kappa = \kappa_A \zeta^A$$

($A = 0, 1$; es gilt die Summenkonvention) ausgedrückt werden. Sei $\chi := [\zeta_0, \zeta_1] \in \mathbb{C}$ der Wert des Produkts der Spinorbasis (Es gilt $\chi \neq 0$, sonst wären ζ_0 und ζ_1 linear abhängig). Eine normierte Basis, d.h. $\chi = 1$, heißt *Spinbein* (*spin-frame*).

Sei $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathcal{M}) := C^k(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ die Menge der *komplexwertigen Skalarfelder* oder *Spinorfelder* der Valenz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ auf \mathcal{M} .

Da $\mathfrak{S} \cong \mathcal{M} \times \mathbb{C}^2$ gilt, ist $(x, \{\zeta_0(x), \zeta_1(x)\})$ mit $\zeta_A : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^2$ ($A = 0, 1$),

$$\zeta_0(x) = (1, 0), \quad \zeta_1(x) = (0, 1),$$

bereits ein C^k -Spinbeinfeld auf \mathcal{M} . Insbesondere existiert also ein globaler Schnitt des prinzipalen *Spinbein-Bündels* $(\tilde{\mathfrak{S}}, p, \mathcal{M}, \mathbb{C}^2; SL(2, \mathbb{C}))$, mit $\tilde{\mathfrak{S}} = \{(x, \tau_x) \mid \tau_x \text{ Spinbein}\}$.

Definition 1.4. Sei formal \mathfrak{S}'_x der zweidimensionale \mathbb{C} -Vektorraum der *gestrichenen Spinoren*. Dann definieren wir die komplexe Konjugation eines (ungestrichenen) Spinors als die Abbildung $\mathfrak{S}_x \rightarrow \mathfrak{S}'_x$, $\kappa \mapsto \bar{\kappa}$, d.h. in Komponenten

$$\overline{\kappa^A} = \bar{\kappa}^{A'} \in \mathfrak{S}'_x. \quad (1.2)$$

Umgekehrt ergibt die komplexe Konjugation eines gestrichenen Spinors einen ungestrichenen [45, p. 106].

Definition 1.5. Seien \mathfrak{S}_x^* und \mathfrak{S}'_x^* die dualen Räume von \mathfrak{S} und \mathfrak{S}' . Seien weiter $\{\zeta_0, \zeta_1\}$ und $\{\bar{\zeta}_0', \bar{\zeta}_1'\}$ jeweils die Basen von \mathfrak{S}_x und \mathfrak{S}'_x , und $\{\zeta^0, \zeta^1\}$ und $\{\bar{\zeta}^{0'}, \bar{\zeta}^{1'}\}$ die jeweils dualen Basen von \mathfrak{S}_x^* und \mathfrak{S}'_x^* . Dann ist ein *Spinor* der Valenz $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ die \mathbb{C} -multilineare Abbildung

$$\phi \in \underbrace{\mathfrak{S}_x^* \otimes \cdots \otimes \mathfrak{S}_x^*}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{\mathfrak{S}'_x^* \otimes \cdots \otimes \mathfrak{S}'_x^*}_{s\text{-mal}} \otimes \underbrace{\mathfrak{S}_x \otimes \cdots \otimes \mathfrak{S}_x}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{\mathfrak{S}'_x \otimes \cdots \otimes \mathfrak{S}'_x}_{q\text{-mal}}$$

Bezüglich der Basen $\{\zeta^A\}$, $\{\bar{\zeta}^{B'}\}$, $\{\zeta_C\}$, $\{\bar{\zeta}_{D'}\}$ kann ein Spinor der Valenz $\left[\begin{smallmatrix} p & q \\ r & s \end{smallmatrix} \right]$ durch

$$\boldsymbol{\phi} = \phi_{A_1 \dots A_r B'_1 \dots B'_s}{}^{C_1 \dots C_p D'_1 \dots D'_q} \zeta^{A_1} \otimes \dots \otimes \zeta^{A_r} \otimes \zeta^{B'_1} \otimes \dots \otimes \zeta^{B'_s} \otimes \zeta_{C_1} \otimes \dots \otimes \zeta_{C_p} \otimes \zeta_{D'_1} \otimes \dots \otimes \zeta_{D'_q}$$

ausgedrückt werden (die Indizes laufen über 0 und 1 bzw. $0'$ und $1'$). Die Reihenfolge gestrichener und ungestrichener Indizes kommutiert nicht im allgemeinen, ebenso nicht diejenige von Indizes gleichen Typs [45, p. 123].

Durch die symplektische Bilinearform $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{S}_x \times \mathfrak{S}_x \rightarrow \mathbb{C}$ wird der ε -Spinor als ein antisymmetrischer Spinor der Valenz $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix} \right]$ definiert, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}]$. Die Komponenten des ε -Spinors, $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{AB} \zeta^A \otimes \zeta^B \in \mathfrak{S}_x^* \otimes \mathfrak{S}_x^*$, lauten

$$\varepsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \chi \\ -\chi & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Entsprechend gilt für seine kontravarianten Komponenten

$$\varepsilon^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \chi^{-1} \\ -\chi^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Die lineare Abbildung $\mathfrak{S}_x \rightarrow \mathfrak{S}_x^*$, $\boldsymbol{\eta} \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}, \cdot)$, ist ein Isomorphismus, die *Kontraktion*. Mit diesem Isomorphismus gilt also $\langle \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\xi} \rangle = [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}]$, wobei $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}, \cdot)$. In Komponenten ist also $\varepsilon_{AB} \eta^A = \eta_B$, oder

$$\eta_B \xi^B = \varepsilon_{AB} \eta^A \xi^B, \quad (1.5)$$

d.h. man kann mit dem ε -Spinor Indizes herunterziehen. Analog kann man mit den Komponenten ε^{AB} Indizes hinaufziehen. Wegen der Antisymmetrie ist beim Hinauf- und Herunterziehen die Reihenfolge der Indizes wichtig. Merkregel: Beim Herunterziehen eines Indexes den ε -Spinor *hinter* und beim Hinaufziehen *vor* die Komponenten schreiben, also

$$\eta^A \varepsilon_{AB} = \eta_B, \quad \varepsilon^{AB} \eta_B = \eta^A, \quad (1.6)$$

Konsequenterweise gilt

$$\varepsilon^{AC} \varepsilon_{CB} = \varepsilon^A{}_B, \quad \varepsilon_{CA} \varepsilon^{CB} = \varepsilon_A{}^B, \quad (1.7)$$

wobei $\varepsilon^A{}_B = -\varepsilon_B{}^A = \delta_B^A$ (δ_B^A ist hier das übliche Kronecker-Symbol). Analoges gilt für gestrichene Indizes,

$$\varepsilon^{A'B'} = \overline{\varepsilon_{AB}}, \quad \varepsilon_{A'B'} = \overline{\varepsilon^{AB}}. \quad (1.8)$$

Die Komponenten des ε -Spinors in einem Spinbein lauten

$$\varepsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Weiter gilt für die Kontraktion eines 2-Spinors $\boldsymbol{\phi}$ wegen $\phi_A{}^A = \varepsilon^{AB} \phi_{AB}$ und $\phi^A{}_A = \varepsilon^{BA} \phi_{AB}$,

$$\phi_A{}^A = -\phi^A{}_A, \quad (1.10)$$

und damit allgemeiner die *see-saw*-Regel $\phi_{\dots A \dots}{}^{\dots A \dots} = -\phi^{\dots A \dots}{}_{\dots A \dots}$, und insbesondere

$$\xi_A \xi^A = 0. \quad (1.11)$$

1.2 Symmetrische Spinoren

Eine zentrale Rolle werden die symmetrischen Spinoren spielen. Definieren wir dafür zunächst die *Symmetrisierung*

$$\chi_{A\dots B(C_1\dots C_r)D\dots E} := \frac{1}{r!} \left(\sum_{\sigma \in \text{Perm}(r)} \chi_{A\dots B\sigma(C_1\dots C_r)D\dots E} \right) \quad (1.12)$$

eines Spinors $\chi_{A\dots B(C_1\dots C_r)D\dots E}$, sowie die *Antisymmetrisierung*

$$\chi_{A\dots B[C_1\dots C_r]D\dots E} := \frac{1}{r!} \left(\sum_{\sigma \in \text{Perm}(r)} \text{sign } \sigma \chi_{A\dots B\sigma(C_1\dots C_r)D\dots E} \right) \quad (1.13)$$

Beispielsweise gilt für einen 2-Spinor ϕ_{AB} und einen 3-Spinor ψ_{ABC}

$$\begin{aligned} \phi_{(AB)} &= \frac{1}{2} (\phi_{AB} + \phi_{BA}), & \phi_{[AB]} &= \frac{1}{2} (\phi_{AB} - \phi_{BA}), \\ \psi_{(ABC)} &= \frac{1}{6} (\psi_{ABC} + \psi_{BAC} + \psi_{BCA} + \psi_{ACB} + \psi_{CAB} + \psi_{CBA}), \\ \psi_{[ABC]} &= \frac{1}{6} (\psi_{ABC} - \psi_{BAC} + \psi_{BCA} - \psi_{ACB} + \psi_{CAB} - \psi_{CBA}), \end{aligned}$$

Ein Spinor, der entweder nur obere oder nur untere Indizes besitzt, heißt *symmetrisch*, wenn er in seinen ungestrichenen und in seinen gestrichenen Indizes symmetrisch ist [45, p. 132], z.B.

$$\psi_{A\dots BC'\dots D'} = \psi_{(A\dots B)(C'\dots D')}. \quad (1.14)$$

Es ist wohlbekannt, daß jede irreduzible Darstellung von $SL(2, \mathbb{C})$, also auch von $SO^+(1, 3)$, isomorph ist zu einer Transformationsgruppe auf symmetrischen Spinoren, die durch eine Spintransformation $\xi_A \mapsto t_A^B \xi_B$ gegeben ist. Symmetrische Spinoren sind also irreduzibel unter den Gruppen $SL(2, \mathbb{C})$ und $SO^+(1, 3)$. Sind $\phi_{\mathcal{A}} := \phi_{A\dots CD'\dots F'}$ die Komponenten eines symmetrischen $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & s \end{bmatrix}$ -Spinors, so sind die Transformationen von der Form $\phi_{\mathcal{A}} \mapsto \phi_{\tilde{\mathcal{A}}} = T_{\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A}} \phi_{\mathcal{A}}$ mit der Matrix $T_{\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A}} = t_{\tilde{A}}^A \cdot t_{\tilde{F}'}^{F'}$, und die $\phi_{\mathcal{A}}$ transformieren sich gemäß der $D(r/2, s/2)$ -Darstellung der Lorentz-Gruppe [19, 8, 17].

Lemma 1.6. *Ist ein Spinor $\psi_{A\dots BC'\dots D'}$ der Valenz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & s \end{bmatrix}$ symmetrisch, so hat er $(r+1)(s+1)$ unabhängige komplexe Komponenten.*

Beweis. Alle Spinorkomponenten mit \tilde{r} Nullen und $r - \tilde{r}$ Einsen und \tilde{s} gestrichenen Nullen und $s - \tilde{s}$ gestrichenen Einsen, $0 \leq \tilde{r} \leq r$, $0 \leq \tilde{s} \leq s$, sind gleich; es gibt $r+1$ Möglichkeiten für \tilde{r} und $s+1$ für \tilde{s} . \square

Wie das illustrative Beispiel eines $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ -Spinors ϕ_{AB} zeigt, der sich in seinen symmetrischen und seinen antisymmetrischen Teil aufspalten läßt,

$$\phi_{AB} = \phi_{(AB)} + \phi_{[AB]} =: \theta_{AB} + \lambda \varepsilon_{AB},$$

$\lambda = \frac{1}{2} \phi_C^C$ [45, Gl. (2.5.23), p. 106], gilt die Eigenschaft allgemeiner Spinoren [45, p. 140]:

Lemma 1.7. *Jeder Spinor $\chi_{A\dots BC'\dots D'}$ ist die Summe eines symmetrischen Spinors und von Produkten des ε -Spinors mit Spinoren niedrigerer Valenz.*

1.3 Die Infeld-van der Waerden-Symbole; Spinoren und Welttensoren

Definition 1.8. Definieren wir vier Hermitesche (2×2) -Matrizen $\sigma^j_{AB'}$, $A = 0, 1$, $B' = 0', 1'$, $j = 0, 1, 2, 3$, durch

$$\sigma^j_{AB'} = \begin{pmatrix} l^j & m^j \\ \bar{m}^j & n^j \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

mit $l^j, n^j, m^j \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, $j = 0, 1, 2, 3$, wobei l, n, m, \bar{m} linear unabhängig sind, wenn die 4-Tupel $l = l(x) = (l^0, l^1, l^2, l^3)$, $n = n(x) = (n^0, n^1, n^2, n^3)$, $m = m(x) = (m^0, m^1, m^2, m^3)$ für jedes $x \in \mathcal{M}$ als Vektoren des \mathbb{C}^4 betrachtet werden, dabei notwendig $l(x), n(x) \in \mathbb{R}^4$ wegen der Hermitezität. Ferner seien $\sigma_j^{AB'}$ die vier Hermiteschen Matrizen

$$\sigma_j^{AB'} = \begin{pmatrix} n_j & -\bar{m}_j \\ -\bar{m}_j & l_j \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

die den 32 Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma^i_{AB'} \sigma_j^{AB'} &= \delta_j^i, \\ \sigma^j_{AB'} \sigma_j^{CD'} &= \varepsilon_A^C \varepsilon_{B'}^{D'} = \delta_A^C \delta_{B'}^{D'}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

genügen. Die acht Matrizen $\sigma^j_{AB'}$, $\sigma_j^{AB'}$ heißen *Infeld-van der Waerden-Symbole* [11, p. 539].

Da \mathcal{M} parallelisierbar ist, existieren die Matrizen $\sigma^j_{AB'}$ in jedem Punkt $x \in \mathcal{M}$, so z. B. mit $l = e_{(0)} + e_{(1)}$, $n = e_{(0)} - e_{(1)}$, $m = e_{(2)} + ie_{(3)}$, wobei $\{e_{(a)} \mid a = 0, \dots, 3\}$ ein Vierbein ist. Die Bedingung der Hermitezität liest sich in Komponentenschreibweise wegen $(\sigma^j_{AB'})^* = \sigma^j_{BA'}$ = $\bar{\sigma}^j_{B'A}$

$$\sigma^j_{AB'} = \bar{\sigma}^j_{B'A}. \quad (1.18)$$

Lemma 1.9. *Das Gleichungssystem (1.17) für die 32 reellen Einträge der Infeld-van der Waerden-Symbole besteht aus höchstens 25 unabhängigen Gleichungen, wenn man voraussetzt, daß $m^j \bar{m}_j \in \mathbb{R}$ ist (ansonsten sind es höchstens 26).*

Beweis. Die erste Gruppe der Gleichungen lautet

$$l^i n_j - m^i \bar{m}_j - \bar{m}^i m_j + n^i l_j = \delta_j^i,$$

die zweite Gruppe läßt sich schreiben als

$$\sum_{j=0}^3 \begin{pmatrix} l^j \\ m^j \\ \bar{m}^j \\ n^j \end{pmatrix} \cdot (n_j, -\bar{m}_j, -m_j, l_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beide Gruppen bestehen also aus je 16 Gleichungen. Die zweite Gruppe läßt sich jedoch mit $m^j \bar{m}_j \in \mathbb{R}$ ohne Informationsverlust auf das System

$$\sum_{j=0}^3 \begin{pmatrix} l^j \\ m^j \\ n^j \end{pmatrix} \cdot (n_j, -m_j, l_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

reduzieren, denn einerseits ist mit $k^j m_j = 0$ auch $k^j \bar{m}_j = 0$, $k^j \in \{l^j, n^j\}$, andererseits folgt aus der ersten Gruppe insbesondere $l^j n_j - m^j \bar{m}_j - \bar{m}^j m_j + n^j l_j = \delta_j^j = 4$, d.h. mit (1.19) $m^j \bar{m}_j + \bar{m}^j m_j = l^j n_j + n^j l_j - 4 = -2$, also $m^j \bar{m}_j = -1$. \square

Definition 1.10. Ein komplexer $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ -Welttensor ist ein Spinor der Valenz $\begin{bmatrix} r & r \\ s & s \end{bmatrix}$, d.h. ein Spinor mit Komponenten der Form $\chi^{AB' \dots CD'}_{EF' \dots GH'}$.

Definition 1.11. Ein komplexer Welttensor, der invariant gegenüber der komplexen Konjugation ist,

$$\chi^{AB' \dots CD'}_{EF' \dots GH'} = \bar{\chi}^{B'A \dots D'C}_{F'E \dots H'G}$$

heißt *reeller Welttensor*. Die Menge der reellen Welttensoren bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}_x \otimes \dots \otimes \mathfrak{T}_x \otimes \mathfrak{T}_x^* \otimes \dots \otimes \mathfrak{T}_x^*$; insbesondere ist $\mathfrak{T}_x \subset \mathfrak{S}_x \otimes \mathfrak{S}'_x$.

Sei $\{\zeta_{(0)}, \zeta_{(1)}\}$ ein globaler Schnitt des Spinbeinbündels. Für die Komponenten $\zeta_{(A)}^B$, $A, B = 0, 1$, gilt wegen $\zeta_{(A)} = \zeta_{(A)}^B \zeta_{(B)}$ natürlich $\zeta_{(A)}^B = \delta_A^B$. Da $\{\zeta_{(0)}, \zeta_{(1)}\}$ eine normierte Spinorbasis ist, sieht man sofort

$$\zeta_{(A)}^C \zeta_{(B)C} = \varepsilon_{AB}, \quad \zeta_{(A)}^C \zeta^{(B)}_C = \varepsilon_A^B, \quad \zeta^{(C)}_A \zeta_{(C)B} = \varepsilon_{AB}, \quad (1.20)$$

d.h. man kann die Klammern weglassen, und die oben entwickelte Spinoralgebra bleibt konsistent. Diese Konsistenz wird nur durch die Beziehungen $\varepsilon_{(A)(B)} = \varepsilon_{AB}$ und $\varepsilon_{(A)}^{(B)} = \varepsilon_A^B$ garantiert; für eine nichtnormierte Spinorbasis müssen die Klammern zur Markierung der Spinbeinindizes bleiben [11, §102]. Dasselbe gilt für das komplex konjugierte Spinbein $\{\bar{\zeta}_{(0)}, \bar{\zeta}_{(1)}\}$ bzw. für dessen Komponenten $\bar{\zeta}_{A'}^{B'}$.

Als komplexe Vektoren geschrieben lauten die Spinbeinkomponenten

$$\zeta_0^A = (1, 0), \quad \zeta_1^A = (0, 1), \quad \bar{\zeta}_{0'}^{A'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\zeta}_{1'}^{A'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beachte, daß wegen $\zeta_B^A = \varepsilon_{CB} \zeta^{CA}$ gilt: $\zeta_0^A = -\zeta^{1A} \zeta_1^A = \zeta^{0A}$, und analog $\bar{\zeta}_{0'}^{A'} = -\zeta^{1'A'} \bar{\zeta}_{1'}^{A'} = \zeta^{0'A'}$. Damit sieht man sofort die Beziehungen

$$\begin{aligned} l^j &= \sigma^j_{AB'} \zeta_0^A \bar{\zeta}_{0'}^{B'}, & m^j &= \sigma^j_{AB'} \zeta_0^A \bar{\zeta}_{1'}^{B'}, \\ \bar{m}^j &= \sigma^j_{AB'} \zeta_1^A \bar{\zeta}_{0'}^{B'}, & n^j &= \sigma^j_{AB'} \zeta_1^A \bar{\zeta}_{1'}^{B'}, \\ l_j &= \sigma_j^{AB'} \zeta_0^A \bar{\zeta}_{0'}^{B'}, & m_j &= \sigma_j^{AB'} \zeta_0^A \bar{\zeta}_{1'}^{B'}, \\ \bar{m}_j &= \sigma_j^{AB'} \zeta_1^A \bar{\zeta}_{0'}^{B'}, & n_j &= \sigma_j^{AB'} \zeta_1^A \bar{\zeta}_{1'}^{B'}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

oder in Matrixschreibweise

$$l^j = (1, 0) \begin{pmatrix} l^j & m^j \\ \bar{m}^j & n^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m^j = (1, 0) \begin{pmatrix} l^j & m^j \\ \bar{m}^j & n^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{etc.}$$

Satz 1.12. Sei $x \in \mathcal{M}$, und sei $T_x \mathcal{M}$ der Tangentialraum von \mathcal{M} an x . Dann ist der Raum der reellen Weltvektoren \mathfrak{T}_x isomorph zum Tangentialraum, $\mathfrak{T}_x \cong T_x \mathcal{M}$.

Beweis. Sei $\{\zeta_0, \zeta_1\}$ ein Spinbein, und sei $\{\bar{\zeta}_{0'}, \bar{\zeta}_{1'}\}$ das komplex konjugierte Spinbein. Dann ist $\{\zeta_0 \otimes \bar{\zeta}_{0'}, \zeta_0 \otimes \bar{\zeta}_{1'}, \zeta_1 \otimes \bar{\zeta}_{0'}, \zeta_1 \otimes \bar{\zeta}_{1'}\}$ eine Basis von $\mathfrak{S}_x \otimes \mathfrak{S}'_x$, d.h. $\mathfrak{S}_x \otimes \mathfrak{S}'_x \cong \mathbb{C}^4$. Die Komponenten eines reellen Welttensors χ bilden wegen der Reellitätsbedingung $\chi^{AB'} = \bar{\chi}^{AB'}$ eine Hermitesche Matrix, d.h. \mathfrak{T}_x ist isomorph zu dem reellen Vektorraum der Hermiteschen (2×2) -Matrizen. Die vier Infeld-van der Waerden-Symbole $\sigma^j_{AB'}$ bilden nun eine Basis dieses Vektorraums, die wiederum durch die Projektionen $\sigma^j_{00'} \mapsto l^j$, $\sigma^j_{01'} \mapsto m^j$, $\sigma^j_{10'} \mapsto \bar{m}^j$, $\sigma^j_{11'} \mapsto n^j$, bijektiv auf die reellen Vektoren

$$\begin{aligned} T^j &= \frac{1}{\sqrt{2}} (l^j + n^j), & X^j &= \frac{1}{\sqrt{2}} (m^j + \bar{m}^j), \\ Y^j &= \frac{1}{\sqrt{2}i} (m^j - \bar{m}^j), & Z^j &= \frac{1}{\sqrt{2}} (l^j - n^j) \end{aligned} \quad (1.22)$$

abgebildet werden können; dies ist aber eine Basis von $T_x\mathcal{M}$. Umgekehrt gilt

$$\begin{aligned} l^j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T^j + Z^j), & n^j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T^j - Z^j), \\ m^j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X^j + iY^j), & \bar{m}^j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X^j - iY^j). \end{aligned} \quad (1.23)$$

□

Analog ordnen wir für jedes $x \in \mathcal{M}$ mit $r + s$ Infeld-van der Waerden-Symbolen isomorph jedem reellen $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ -Welttensor ein Element $\chi = (\chi^{a\dots d}_{p\dots q})$ zu, d.h. $\chi \in \mathfrak{T}_x \otimes \dots \otimes \mathfrak{T}_x \otimes \mathfrak{T}_x^* \otimes \dots \otimes \mathfrak{T}_x^* \cong \mathfrak{G}_x \otimes \mathfrak{G}'_x \otimes \dots \otimes \mathfrak{G}_x^* \otimes \mathfrak{G}'_x^* \cong \mathbb{R}^{4^{r+s}}$.

Definition 1.13. Das Vierbein $\{e_{(0)}, e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}\} := \{T, X, Y, Z\}$ mit

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}(l + n), \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}}(m + \bar{m}), \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2}i}(m - \bar{m}), \quad Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(l - n), \quad (1.24)$$

heißt *Minkowski-Tetrade*.

Folgerung 1.14. Da sowohl das Spinor-Bündel (nach Konstruktion!) und mithin das Faserbündel der reellen Weltvektoren $(\mathfrak{T}, p, \mathcal{M})$, als auch das Tangentialbündel $(T\mathcal{M}, p', \mathcal{M})$ wegen der Parallelisierbarkeit von \mathcal{M} trivial sind, sind beide Bündelräume diffeomorph,

$$\mathfrak{T} \cong T\mathcal{M} \cong \mathcal{M} \times \mathbb{R}^4.$$

Definition 1.15. Es seien der ε -Spinor und die Infeld-van der Waerden-Symbole gegeben. Dann heißt der $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ -Welttensor

$$g_{ij} = \sigma_i^{AB'} \sigma_j^{CD'} \varepsilon_{AC} \bar{\varepsilon}_{B'D'} \quad (1.25)$$

metrischer Welttensor von \mathcal{M} .

Man sieht sofort die Beziehungen

$$\begin{aligned} g^{ij} &= \sigma^i_{AB'} \sigma^j_{CD'} \varepsilon^{AC} \varepsilon^{B'D'}, \\ g_i^j &= g_{il} g^{lj} = \sigma_i^{AB'} \sigma_l^{CD'} \sigma^l_{EF'} \sigma^j_{GH'} \varepsilon_{AC} \varepsilon_{B'D'} \varepsilon^{EG} \varepsilon^{F'H'} \\ &= \sigma_i^{AB'} \sigma^j_{GH'} \varepsilon_E^C \varepsilon_{F'}^{D'} \varepsilon_{AC} \varepsilon_{B'D'} \varepsilon^{EG} \varepsilon^{F'H'} \\ &= \sigma_i^{AB'} \sigma^j_{GH'} \varepsilon_{AE} \varepsilon_{B'D'} \varepsilon^{EG} \varepsilon^{D'H'} = \sigma_i^{AB'} \sigma^j_{GH'} \varepsilon^G_A \varepsilon^{H'}_{B'} = \sigma_i^{AB'} \sigma^j_{AB'} \\ &= \delta_i^j, \\ \varepsilon^{AB} \varepsilon^{C'D'} &= g_{ij} \sigma^i_{AB'} \sigma^j_{CD'}. \end{aligned}$$

Mit (1.9) und $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{C'D'}$ gilt also

$$g_{ij} = l_i n_j + n_i l_j - m_i \bar{m}_j - \bar{m}_i m_j, \quad g^{ij} = l^i n^j + n^i l^j - m^i \bar{m}^j - \bar{m}^i m^j. \quad (1.26)$$

Bemerkung. Die Zerlegung (1.26) der Metrik g_{ij} durch die Komponenten einer Nulltetrade hat sich in den 1960er Jahren als äußerst fruchtbar erwiesen. Mit ihrer Hilfe entdeckte Kerr [30] die Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen für ein stationäres, axialsymmetrisches, ladungsfreies und asymptotisch flaches Gravitationsfeld im Vakuum, ein rotierendes schwarzes Loch. Wenig später fanden Newman et al. [39] die Lösung für ein geladenes rotierendes schwarzes Loch. Sie verwendeten dabei neben dem Nulltetraden-Formalismus die »Newman-Janis-Konstruktion« [40], die durch eine (etwas willkürliche) komplexe Koordinatensubstitution aus einer bekannten Lösung der Feldgleichung (z.B. der Reissner-Nordström-Raumzeit) eine neue liefern kann (die Kerr-Newman-Raumzeit); siehe dazu auch [16].

Es gilt mit (1.22) bzw. (1.24)

$$\begin{aligned} g_{ij} T^i T^j &= \frac{1}{2} (l_i n_j + n_i l_j - m_i \bar{m}_j - \bar{m}_i m_j) (l^i + n^i) (l^j + n^j) \\ &= \frac{1}{2} (n_j + l_j) (l^j + n^j) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1, \end{aligned}$$

und entsprechend $g_{ij} X^i X^j = g_{ij} Y^i Y^j = g_{ij} Z^i Z^j = -1$. Mit den Bezeichnungen

$$e_{(0)}^j = T^j, \quad e_{(1)}^j = X^j, \quad e_{(2)}^j = Y^j, \quad e_{(3)}^j = Z^j,$$

vgl. Definition 1.13, gilt also für $a, b = 0, \dots, 3$

$$g_{ij} e_{(a)}^i e_{(b)}^j = \eta_{(a)(b)} \quad (1.27)$$

mit der Matrix $(\eta_{(a)(b)})_{a,b=0,\dots,3} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Aufgefaßt als Matrix hat g_{ij} in jedem Punkt $x \in \mathcal{M}$ also die Signatur -2 .

Bemerkung 1.16. Bezüglich der Minkowski-Tetrade haben die Vektoren l, n, m, \bar{m} die Komponenten $l^{(a)} = n_{(a)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 0, 1)$, $n^{(a)} = l_{(a)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 0, -1)$, $m^{(a)} = -m_{(a)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, i, 0)$, ($a = 0, 1, 2, 3$), und daher haben die Infeld-van der Waerden-Symbole die Darstellung

$$\begin{aligned} \sigma^0_{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0^{AB'}, & \sigma^1_{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1^{AB'}, \\ \sigma^2_{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_2^{AB'}, & \sigma^3_{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3^{AB'}. \end{aligned}$$

Lemma 1.17. Sei $x \in \mathcal{M}$, und sei $[\cdot, \cdot]: (\mathfrak{S}_x \otimes \mathfrak{S}'_x) \times (\mathfrak{S}_x \otimes \mathfrak{S}'_x) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$[(\xi^{AB'}), (\eta^{CD'})] = \varepsilon_{AC} \varepsilon_{B'D'} \xi^{AB'} \eta^{CD'},$$

das (symplektische) Skalarprodukt auf $\mathfrak{S}_x \otimes \mathfrak{S}'_x$. Dann gilt

$$[(\xi^{AB'}), (\eta^{CD'})] = g_{ij} \xi^i \eta^j, \quad (1.28)$$

$$[(\xi^{AB'}), (\xi^{CD'})] = 2 \det(\xi^{AB'}). \quad (1.29)$$

Beweis. Mit den Definitionen 1.10 und 1.15 folgt sofort

$$\varepsilon_{AC} \varepsilon_{B'D'} \xi^{AB'} \eta^{CD'} = \varepsilon_{AC} \varepsilon_{B'D'} \sigma_i^{AB'} \sigma^j_{CD'} \xi^i \eta^j = g_{ij} \xi^i \eta^j.$$

Ferner gilt

$$(\xi^{AB'}) = (\sigma_j^{AB'}) \xi^j = \begin{pmatrix} n_j \xi^j & -\bar{m}_j \xi^j \\ -m_j \xi^j & l_j \xi^j \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} 2 \det(\xi^{AB'}) &= 2 \left((n_j \xi^j)(l_i \xi^i) - (\bar{m}_j \xi^j)(m_i \xi^i) \right) = 2 (l_i n_j - m_i \bar{m}_j) \xi^i \xi^j \\ &= (l_i n_j - m_i \bar{m}_j + n_i l_j - \bar{m}_i m_j) \xi^i \xi^j = g_{ij} \xi^i \xi^j. \end{aligned}$$

□

Satz 1.18. In jedem Punkt $x \in \mathcal{M}$ induziert eine Spinortransformation der reellen Weltvektoren

$$s_x: \mathfrak{T}_x \rightarrow \mathfrak{T}_x, \quad (X^{AB'}) \mapsto (Y^{AB'}) = \mathbf{S} (X^{AB'}) \mathbf{S}^*, \quad \mathbf{S} \in SL(2, \mathbb{C}),$$

bzw. in Komponenten

$$Y^{AB'} = S_C^A X^{CD'} \bar{S}^{B'}_{D'},$$

mit $\mathbf{S} = (S_C^A)$, $\mathbf{S}^* = (\bar{S}^{B'}_{D'})$, eine Lorentz-Transformation im Tangentialraum $T_x\mathcal{M}$, d.h. in Komponenten bzgl. der Minkowski-Tetrade eine lineare Transformation

$$\Lambda_x(\mathbf{S}) : T_x\mathcal{M} \rightarrow T_x\mathcal{M}, \quad X^{(a)} \mapsto Y^{(a)} = L^{(a)}_{(b)} X^{(b)}, \quad (L^{(a)}_{(b)}) \in O(1,3).$$

Setzt man voraus, daß die Abbildung $L : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow O(1,3)$, $\mathbf{S} \mapsto \Lambda(\mathbf{S})$, mit der offensichtlichen Identifizierung von $\Lambda(\mathbf{S})$ mit der Matrix $(L^{(a)}_{(b)})$, als Abbildung zwischen zwei Lie-Gruppen stetig ist, so ist notwendig $\Lambda(\mathbf{S})$ eine eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation,

$$(L^{(a)}_{(b)}) \in SO^+(1,3).$$

Beweis. Da mit (1.29) $[(X^{AB'}), (X^{AB'})] = 2 \det(X^{AB'}) \forall (X^{AB'}) \in \mathfrak{T}_x$ gilt und ferner für $(Y^{AB'}) = \mathbf{S}(X^{AB'}) \mathbf{S}^* \forall \mathbf{S} \in M(2, \mathbb{C})$

$$\det(Y^{AB'}) = \det(X^{AB'}) \cdot \det^2 \mathbf{S}$$

ist, folgt speziell für $\mathbf{S} \in SL(2, \mathbb{C})$, daß $[(Y^{AB'}), (Y^{AB'})] = [(X^{AB'})(X^{AB'})]$. Weiter rechnet man leicht nach, daß mit $\mathbf{S} \in SL(2, \mathbb{C})$ die (2×2) -Matrix $(Y^{AB'})$ genau dann Hermitesch ist, wenn $(X^{AB'})$ Hermitesch ist, d.h. s_x ist wohldefiniert. Insgesamt ist s_x also eine Isometrie bzgl. des Skalarprodukts $[\cdot, \cdot]$ auf \mathfrak{T}_x (sogar auf ganz $\mathfrak{S}_x \otimes \mathfrak{S}'_x$). Damit gilt aber auch für die entsprechenden Tangentialvektoren $g_{ij} Y^i Y^j = g_{ij} X^i X^j$, also $\eta_{(a)(b)} Y^{(a)} Y^{(b)} = \eta_{(a)(b)} X^{(a)} X^{(b)}$, und $X^{(a)} \mapsto Y^{(b)}$ ist eine Isometrie bzgl. des Minkowski-Produkts. Da s_x und die Abbildung $X^{AB'} \mapsto X^{(a)} = \sigma^{(a)}_{AB'}$ linear sind, ist notwendig die Abbildung $X^{(a)} \mapsto Y^{(a)}$ linear, also $Y^{(a)} = L^{(a)}_{(b)} X^{(b)}$ für eine Matrix $(L^{(a)}_{(b)}) \in O(1,3)$. Da $SL(2, \mathbb{C})$ eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist, kann das Bild einer stetigen Abbildung $\Lambda_x : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow O(1,3)$ nur Teilmenge einer einzigen Zusammenhangskomponente von $O(1,3)$ sein; da aber natürlich $\Lambda_x(\mathbf{1}_{SL(2, \mathbb{C})}) = \mathbf{1}_{O(1,3)}$ gilt, ist diese Zusammenhangskomponente genau diejenige, die $\mathbf{1}_{O(1,3)}$ enthält, d.h. $\Lambda_x(SL(2, \mathbb{C})) \subset SO^+(1,3)$. \square

Bemerkung. Seien $\sigma^{(0)}_{AB'}$ aus Bemerkung 1.16 die Komponenten der Infeld-van der Waerden-Symbole bzgl. der Minkowski-Tetrade. Dann ist $\Lambda : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow O(1,3)$, $\mathbf{S} \mapsto \Lambda_x(\mathbf{S})$ mit

$$\Lambda_x(\mathbf{S}) = L^{(a)}_{(b)} := \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{S} (\sigma^{(0)}_{AB'}) ((\sigma^{(0)}_{AB'}) \mathbf{S})^* \quad (1.30)$$

eine stetige 2-1-Überlagerung [8, 22, 14].

Definition 1.19. Sei $x \in \mathcal{M}$. Ein Vektor $\mathbf{V} \in T_x\mathcal{M}$ heißt *raum-*, *zeit-* bzw. *lichtartig*, wenn

$$\mathbf{g}_x(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = g_{ij} V^i V^j < 0, > 0 \text{ bzw. } = 0$$

gilt. Der Nullvektor $\mathbf{V} = 0$ sei per Definition raumartig. Ein nicht-raumartiger Vektor heißt auch *kausal*. Sei $T\mathcal{M}$ das Tangentialbündel von \mathcal{M} . Dann heißt $(x, \mathbf{V}) \in T\mathcal{M}$ *raum-*, *zeit-* oder *lichtartig*, wenn $\mathbf{V}(x) \in T_x\mathcal{M}$ es ist. Sei

$$\mathcal{T} = \{(x, \mathbf{V}) \in T\mathcal{M} : (x, \mathbf{V}) \text{ ist kausal}\}$$

die Menge der kausalen Punkte von $T\mathcal{M}$. \mathcal{T} hat entweder eine oder zwei Zusammenhangskomponenten [47, §1.2, Prop.1.2.1]. Existiert ein zeitartiges (insbesondere nirgends verschwindendes) Vektorfeld $T : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$, $T(x) = (x, \mathbf{e}_{(0)} := \mathbf{T})$, so heißt $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ eine *durch T zeitorientierte Raumzeit* [5, pp. 16].

Für einen beliebigen zeitartigen Vektor $\mathbf{T} \in T\mathcal{M}$ gilt $\mathbf{g}_x(\mathbf{T}, \mathbf{V}) = 0$ genau dann, wenn \mathbf{V} raumartig ist, wie man schnell mit der Minkowski-Basis sieht. Daher ist die C^k -Abbildung

$$\psi : \mathcal{T} \rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, \infty), \quad \psi(x, \mathbf{V}) = \mathbf{g}_x(\mathbf{T}, \mathbf{V})$$

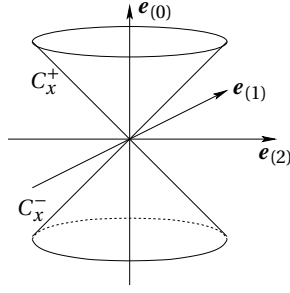


Abbildung 1.1: Der Lichtkegel $C_x \subset T_x \mathcal{M}$.

wohldefiniert. Ferner ist sie surjektiv. Also hat \mathcal{T} zwei Zusammenhangskomponenten. Wir nennen

$$\mathcal{T}^+ = \psi^{-1}(0, \infty), \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{T}^- = \psi^{-1}(-\infty, 0)$$

die *Zukunft* bzw. die *Vergangenheit* bezüglich T . Für jedes $x \in \mathcal{M}$ bildet die Untermannigfaltigkeit

$$C_x = \{\mathbf{V} \in T_x \mathcal{M} \mid \mathbf{g}_x(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = 0, \mathbf{V} \neq 0\} \quad (1.31)$$

einen Kegel, wie man mit der Darstellung von \mathbf{V} in der Basis $\{\mathbf{e}_{(a)}: a = 0, \dots, 3\}$, $\mathbf{V} = V^{(a)}\mathbf{e}_{(a)}$ und durch die Beziehung

$$\mathbf{g}_x(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = g_{ij}V^iV^j = \eta_{(a)(b)}V^{(a)}V^{(b)} = (V^{(0)})^2 - \sum_{\alpha=1}^3 (V^{(\alpha)})^2$$

sofort sieht. Dieser Kegel ist der *Lichtkegel*. C_x besteht aus den zwei Zusammenhangskomponenten

$$C_x^+ = \{\mathbf{V} = V^{(a)}\mathbf{e}_{(a)} \in C_x \mid V^{(0)} > 0\}, \quad C_x^- = C_x \setminus C_x^+,$$

dem *Zukunfts-* und dem *Vergangenheitslichtkegel* bezüglich T , vgl. Abbildung 1.1. Zusammengefaßt haben wir das Resultat:

Satz 1.20. *Unter den obigen auf S. 7 aufgeführten allgemeinen topologischen Bedingungen an \mathcal{M} ist $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ eine raumorientierbare und durch $T: \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$, $T(x) = (x, \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{l} + \mathbf{n}))$ zeitorientierte Raumzeit, für die das Spinbein-Bündel trivial ist [45, pp. 104, pp. 117].*

Definition 1.21. Bezüglich der Raumzeit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ sind die Vektoren \mathbf{l} , \mathbf{n} , \mathbf{m} , $\bar{\mathbf{m}}$ lichtartig, und wegen der Normierungs- und Orthogonalitätsbedingungen bilden sie ein Nullvierbein, die *Newman-Penrose-Tetrade*.

Folgerung 1.22. Nach Konstruktion gilt für jedes $x \in \mathcal{M}$, daß $\mathbf{l}(x)$ und $\mathbf{n}(x)$, aufgefaßt als Tangentialvektoren, Elemente des Zukunftslichtkegels sind,

$$\mathbf{l}(x), \mathbf{n}(x) \in C_x^+,$$

denn es gilt $\mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{(0)} + \mathbf{e}_{(3)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{T} + \mathbf{Z})$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{(0)} - \mathbf{e}_{(3)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{T} - \mathbf{Z})$, d.h. $l^{(0)} = n^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$.

Bemerkung 1.23. Eine physikalisch »sinnvolle« Raumzeit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ sollte keine geschlossenen zeitartigen Kurven besitzen. Daher müssen die Infeld-van der Waerden-Symbole so gewählt sein, daß der Fluß des Vektorfeldes $T \in T\mathcal{M}$, also $\gamma_x: I \rightarrow \mathcal{M}$, $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ offen, mit

$$T(x) = (x, \dot{\gamma}_x(0)) \quad \text{und} \quad \gamma_x(0) = x,$$

$\forall x \in \mathcal{M}$ keine geschlossenen Bahnen enthält. Da \mathcal{M} jedoch offen ist, existiert ein solcher Fluß $\Phi: I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $\Phi(\tau, x) = \gamma_x(\tau)$.

Bemerkungen. (a) Ist (\mathcal{M}, g) durch ein Vektorfeld T zeitorientiert, so heißt (\mathcal{M}, g) *zeitorientierbar*. In diesem Fall gibt es genau zwei Zeitorientierungen, nämlich diejenige durch T und diejenige durch $-T$ [5, p. 16]. Das Konzept der Zeitorientierbarkeit einer allgemeinen Lorentz-Mannigfaltigkeit hängt wesentlich ab von der Metrik und nicht nur von der zugrundeliegenden Topologie. Ist \mathcal{M} jedoch einfach zusammenhängend, so ist (\mathcal{M}, g) zeitorientierbar für jede Lorentz-Metrik g [47, p. 24]. (Allgemein heißt eine Metrik g einer n -Mannigfaltigkeit Lorentzsch, wenn die Signatur $2 - n$ ist.)

(b) (\mathcal{M}, g) ist genau dann zeitorientierbar, wenn \mathcal{T} zwei Zusammenhangskomponenten besitzt [47, p. 24].

(c) Allgemein gilt, daß eine raum- oder zeitorientierbare pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit genau dann eine Spin-Struktur besitzt, wenn ihre zweite Stiefel-Whitney-Klasse verschwindet [7]. Dasselbe gilt auch für Riemannsche Mannigfaltigkeiten [35, 33]. Ferner besitzt eine einfach zusammenhängende pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit höchstens eine Spin-Struktur [4, p. 98], siehe auch Anhang A.5 dieser Arbeit.

1.4 Differentiation von Spinoren

Definition 1.24. Ein *spinorieller kovarianter Ableitungsoperator* oder ein *Spinor-Zusammenhang* ist eine lineare Abbildung $\nabla: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}^* \otimes \mathfrak{S}'^*$, $\xi \mapsto \nabla\xi$, die der Leibniz-Regel genügt, d.h. für die

$$\nabla(f\xi) = f\nabla\xi + \xi\nabla(f) \quad \forall f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}, \mathbb{C}), \xi \in \mathfrak{S} \quad (1.32)$$

gilt. Dabei ist definitionsgemäß $\nabla f = df$ die äußere Ableitung von $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$. In Komponenten einer Spinorbasis $\{\zeta_0, \zeta_1\}$ und der komplex konjugierten Basis $\{\bar{\zeta}_{0'}, \bar{\zeta}_{1'}\}$ gilt für $\xi = \xi^A \zeta_A$

$$\nabla\xi = (\xi^C{}_{;AB'}) \zeta_C \otimes \zeta^A \otimes \bar{\zeta}^{B'} \quad (1.33)$$

und es gilt für $\xi, \eta \in \mathfrak{S}$ und $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, daß $(\xi^C + \eta^C)_{;AB'} = \xi^C{}_{;AB'} + \eta^C{}_{;AB'}$ und $(f\xi^C)_{;AB'} = f\xi^C{}_{;AB'} + \xi^C f_{;AB'}$. Insbesondere gilt in lokalen Koordinaten $\{x^0, \dots, x^3\}$ $f_{;AB'} = \sigma^i{}_{AB'} \partial f / \partial x^i$ für $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Damit bezeichnen wir speziell für Funktionen $\partial_{AB'} f := f_{;AB'}$, d.h.

$$\partial_{AB'} = \sigma^i{}_{AB'} \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (1.34)$$

Bislang sind die Komponenten $\xi^C{}_{AB'}$ nicht spezifiziert. Dazu definieren wir zunächst für kontravariante Spinoren $\xi, \eta \in \mathfrak{S}$ und $\bar{\kappa} \in \mathfrak{S}'$ die *spinorielle Richtungsableitung* von ξ nach η und $\bar{\kappa}$ durch $\nabla_{\eta, \bar{\kappa}}: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$,

$$\nabla_{\eta, \bar{\kappa}} \xi := (\eta^a \bar{\kappa}^{B'} \xi^C{}_{;AB'}) \zeta_C. \quad (1.35)$$

Analog sei $\nabla_{\eta, \bar{\kappa}}: \mathfrak{F}(\mathcal{M}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$,

$$\nabla_{\eta, \bar{\kappa}} f := \eta^a \bar{\kappa}^{B'} f_{;AB'}. \quad (1.36)$$

Mit $\nabla_{AB'} := \nabla_{\zeta_A, \bar{\zeta}_{B'}}$ gilt also $\nabla_{AB'} f = \partial_{AB'} f$, und mit der Leibnizregel folgt

$$\nabla_{AB'} \xi = \nabla_{AB'} (\xi^C \zeta_C) = \partial_{AB'} (\xi^C) \zeta_C + \xi^C \nabla_{AB'} \zeta_C. \quad (1.37)$$

Insbesondere ist mit den *Spinkoeffizienten*

$$\Gamma^D{}_{CAB'} = \langle \zeta^D, \nabla_{AB'} \zeta_C \rangle \quad (1.38)$$

die Richtungsableitung des Basisspinors ζ_C nach den Basisspinoren ζ_A und $\bar{\zeta}_{B'}$ wegen $\Gamma^D{}_{CAB'} = (\nabla_{AB'} \zeta_C)^D \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ durch

$$\nabla_{AB'} \zeta_C = \Gamma^D{}_{CAB'} \zeta_D \quad (1.39)$$

gegeben. Die Spinkoeffizienten sind also die Komponenten des spinoriellen Zusammenhangs ∇ . Insgesamt gilt also für die Komponenten der kovarianten Ableitung eines kontravarianten Spinors $\xi = \xi^C \zeta_C$, $\nabla \xi = (\xi^C{}_{;AB'}) \zeta_C \otimes \zeta^A \otimes \bar{\zeta}^C$,

$$\xi^C{}_{;AB'} = \partial_{AB'} \xi^C + \xi^D \Gamma^C{}_{DAB'} \quad (1.40)$$

Um auch $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ -Spinoren kovariant ableiten zu können, erweitern wir ∇ zu einer Abbildung $\nabla: \mathfrak{S}^* \rightarrow \mathfrak{S}^* \otimes \mathfrak{S}^* \otimes \mathfrak{S}'^*$ durch die Definition

$$\nabla \kappa := \kappa_{C;AB'} \zeta^C \otimes \zeta^A \otimes \bar{\zeta}^{B'}, \quad \text{wobei} \quad \kappa_{C;AB'} := \partial_{AB'} \kappa_C - \kappa_D \Gamma^D{}_{CAB'}, \quad (1.41)$$

für $\kappa = \kappa_C \zeta^C \in \mathfrak{S}^*$. Für die kovariante Spinorableitung einer dualen Basis $\{\zeta^A\}$ gilt damit

$$\nabla_{AB'} \zeta^C = -\Gamma^C{}_{DAB'} \zeta^D$$

Weiter gilt

$$\kappa_{C;AB'} \xi^C = \xi^C \partial_{AB'} \kappa_C - \kappa_D \xi^C \Gamma^D{}_{CAB'} = \xi^C \partial_{AB'} \kappa_C + \kappa_D \partial_{AB'} \xi^D - \kappa_D \xi^D{}_{;AB'},$$

für $\kappa = \kappa_C \zeta^C \in \mathfrak{S}^*$, $\xi = \xi^C \zeta_C \in \mathfrak{S}$ also

$$(\kappa_C \xi^C)_{;AB'} = \partial_{AB'} (\kappa_C \xi^C).$$

Für die Kontraktion $\langle \kappa, \xi \rangle = \kappa(\xi) = \kappa_C \xi^C \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ folgt somit $\nabla \langle \kappa, \xi \rangle = d \langle \kappa, \xi \rangle$, d.h. die Ableitung kovarianter Spinoren ist konsistent mit der kontravarianten.

Als nächsten Schritt definieren wir die kovariante Spinorableitung gestrichelter Spinoren $\bar{\xi} = \bar{\xi}^{A'} \bar{\zeta}_{A'} \in \mathfrak{S}'$, $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{A'} \bar{\zeta}^{A'} \in \mathfrak{S}'^*$, $\nabla \bar{\xi} = \bar{\xi}^{C'}{}_{;AB'} \bar{\zeta}_{C'} \otimes \bar{\zeta}^{A'} \otimes \bar{\zeta}^{B'}$, $\nabla \bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{C'}{}_{;AB'} \bar{\zeta}^{C'} \otimes \bar{\zeta}^{A'} \otimes \bar{\zeta}^{B'}$ durch

$$\bar{\xi}^{C'}{}_{;AB'} := \overline{\xi^C{}_{;BA'}} \quad \bar{\kappa}_{C'}{}_{;AB'} := \overline{\kappa_{C;BA'}};$$

beachte, daß $\xi \in \mathfrak{S}$, $\kappa \in \mathfrak{S}^*$. Durch die Leibniz-Regel

$$\nabla(\phi \otimes \chi) = (\nabla \phi) \chi + \phi (\nabla \chi)$$

für zwei beliebige Spinorfelder ψ , χ schließlich kann der Zusammenhang für einen Spinor beliebiger Valenz erweitert werden, vgl. [45, pp. 213].

Lemma 1.25. *Es gibt einen und nur einen Spinor-Zusammenhang, der kovariant konstant und torsionsfrei ist, d.h. für den gilt*

$$\begin{aligned} \nabla \varepsilon &= 0, \\ (\nabla_{AB'} \nabla_{CD'} - \nabla_{CD'} \nabla_{AB'}) f &= 0 \quad \forall f \in \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Beweis. [45, pp. 214]. □

Bemerkung. $\nabla \varepsilon = 0$ ist äquivalent zu $\varepsilon_{CD;AB'} = 0$.

Lemma 1.26. *Es gilt $\sigma^j{}_{CD';AB'} = 0$, $\sigma_j{}^{CD'}{}_{;AB'} = 0$.*

Beweis. Sei $X_{CD'}$ ein $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ -Spinor und $X_j = \sigma_j{}^{CD'} X_{CD'}$ der zugehörige Welttensor. Da die $X_{CD';AB'}$ die Komponenten eines $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ -Spinors sind, gilt $X_{CD';AB'} = \sigma^j{}_{CD'} X_{j;AB'}$. Andererseits ist $X_{CD';AB'} = (\sigma^j{}_{CD'} X_j)_{;AB'}$. Also gilt die erste Gleichung. Die zweite folgt analog. □

Bemerkung. Sei für $j = 0, \dots, 3$

$$\nabla_j := \sigma_j^{AB'} \nabla_{AB'} \quad (1.42)$$

die kovariante Richtungsableitung in x_j -Richtung. Sie ist kovariant konstant und torsionsfrei, d.h.

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \quad (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) f = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{F}. \quad (1.43)$$

Angewandt auf Tensoren ist der Spinorzusammenhang also gleich dem Levi-Civita-Zusammenhang.

Sei $\{\zeta_0, \zeta_1\}$ ein Spinbein, und sei $\{\bar{\zeta}_0, \bar{\zeta}_1\}$ das komplex konjugierte Spinbein. Dann gilt mit den Beziehungen (1.21) wegen $\sigma^j_{AB'} \sigma_j^{AB'} = 1$

$$\partial_{00'} = l^j \partial_j, \quad \partial_{01'} = m^j \partial_j, \quad \partial_{10'} = \bar{m}^j \partial_j, \quad \partial_{11'} = n^j \partial_j \quad (1.44)$$

und entsprechend

$$\nabla_{00'} = l^j \nabla_j, \quad \nabla_{01'} = m^j \nabla_j, \quad \nabla_{10'} = \bar{m}^j \nabla_j, \quad \nabla_{11'} = n^j \nabla_j. \quad (1.45)$$

Ferner gilt für die Spinkoeffizienten in einem Spinbein $\Gamma^D_{CAB'} = \zeta^D_E \zeta_C^E{}_{;AB'}$. Sei

$$\Gamma_{DCAB'} := \varepsilon_{FD} \Gamma^F_{CAB'}, \quad (1.46)$$

d.h. $\Gamma_{DCAB'} = \zeta_{DE} \zeta_C^E{}_{;AB'}$.

Lemma 1.27. *Es gilt $\Gamma_{DCAB'} = \Gamma_{CDAB'}$.*

Beweis. Mit der *see-saw*-Regel ist

$$\Gamma_{DCAB'} = -\zeta_D^E \zeta_{C;AB'}^E, \quad (1.47)$$

und daher gilt mit der Leibniz-Regel

$$0 = \varepsilon_{CD;AB'} = (\zeta_{CE} \zeta_D^E)_{;AB'} = \zeta_{CE} \zeta_D^E{}_{;AB'} + \zeta_D^E \zeta_{CE;AB'} = \Gamma_{CDAB'} - \Gamma_{DCAB'}.$$

□

Konventionellerweise benutzt man folgende Symbole zur Abkürzung:

$\Gamma_{CDAB'}$	$\begin{array}{c ccc} & CD & & \\ \hline & 00 & 01 & 11 \\ & \text{oder } 10 & & \end{array}$	$\Gamma_{CDAB'}$	$\begin{array}{c cccc} & C_D & & & \\ \hline & 0_0 & 1_0 & 0_1 & 1_1 \\ \hline & 00' & 10' & 01' & 11' \end{array}$
$00'$	$\begin{array}{ccc} \tilde{\kappa} & \tilde{\varepsilon} & \tilde{\pi} \end{array}$	$00'$	$\begin{array}{cccc} \tilde{\varepsilon} & -\tilde{\kappa} & \tilde{\pi} & -\tilde{\varepsilon} \end{array}$
$10'$	$\begin{array}{ccc} \tilde{\rho} & \tilde{\alpha} & \tilde{\lambda} \end{array}$	$10'$	$\begin{array}{cccc} \tilde{\alpha} & -\tilde{\rho} & \tilde{\lambda} & -\tilde{\alpha} \end{array}$
$01'$	$\begin{array}{ccc} \tilde{\sigma} & \tilde{\beta} & \tilde{\mu} \end{array}$	$01'$	$\begin{array}{cccc} \tilde{\beta} & -\tilde{\sigma} & \tilde{\mu} & -\tilde{\beta} \end{array}$
$11'$	$\begin{array}{ccc} \tilde{\tau} & \tilde{\gamma} & \tilde{\nu} \end{array}$	$11'$	$\begin{array}{cccc} \tilde{\gamma} & -\tilde{\tau} & \tilde{\nu} & -\tilde{\gamma} \end{array}$

Vgl. [45] bzw. [41]. In [45, §4.5, pp. 228] sind speziell die Beziehungen der Spinkoeffizienten zu den Christoffel- und den Infeld-van der Waerden-Symbolen aufgeführt.

1.5 Die Beziehung zwischen Spinor- und Tetradenkalkül

Betrachtet man nun die Raumzeit (\mathcal{M}, g) mit Spinor-Struktur als gegeben und sieht die vier Vektorfelder $e_{(a)}^j$, $a = 1, 2, 3, 4$ mit

$$e_{(1)}^j = e^{(2)j} = l^j, \quad e_{(2)}^j = e^{(2)j} = n^j, \quad e_{(3)}^j = -e^{(4)j} = m^j, \quad e_{(4)}^j = -e^{(3)j} = \bar{m}^j \quad (1.48)$$

als ein Vierbein oder eine Tetrade (mit den Vierbeinindizes in Klammern), so gilt für die Matrix $\eta_{(a)(b)} = e_{(a)}^j e_{(b)j}$

$$\eta_{(a)(b)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.49)$$

Sei weiter $\eta^{(a)(b)} = \eta_{(a)(b)}$ die inverse Matrix, d.h. $\eta^{(a)(b)} \eta_{(b)(c)} = \delta^{(a)}_{(c)}$. Die Projektionen eines beliebigen Tensorfeldes $T_{j_1 \dots j_p}$ auf das Vierbein liefert die Vierbeinkomponenten

$$T_{(a_1) \dots (a_p)} = T_{j_1 \dots j_p} e_{(a_1)}^{j_1} \dots e_{(a_p)}^{j_p}. \quad (1.50)$$

Man kann mit den Matrizen $\eta_{(a)(b)}$ und $\eta^{(a)(b)}$ Vierbeinindizes herauf- und herunterziehen, z. B.

$$T_{(a)}^{(b)} = \eta_{(a)(c)} T^{(c)(b)} = \eta^{(a)(b)} T_{(c)(b)}. \quad (1.51)$$

Es gilt die Beziehung (vgl. (1.26))

$$e_{(a)i} e^{(a)}_i = g_{ij} \quad (1.52)$$

Definiert man die *Richtungsableitung* der Vierbeinkomponenten eines Tensors durch

$$T_{(a_1) \dots (a_p), (b)} := T_{j_1 \dots j_p, k} e_{(a_1)}^{j_1} \dots e_{(a_p)}^{j_p} e_{(b)}^k, \quad (1.53)$$

so kann man mit Hilfe der Ricci-Rotationskoeffizienten

$$\gamma_{(a)(b)(c)} := e_{(a)}^i e_{(b)i;j} e_{(c)}^j \quad (1.54)$$

die *intrinsische Ableitung*

$$T_{(a_1) \dots (a_p) | (b)} := T_{j_1 \dots j_p; k} e_{(a_1)}^{j_1} \dots e_{(a_p)}^{j_p} e_{(b)}^k \quad (1.55)$$

ausdrücken durch

$$T_{(a_1) \dots (a_p) | (b)} = T_{(a_1) \dots (a_p), (b)} - \gamma^{(c)}_{(a_1)(b)} T_{(c)(a_2) \dots (a_p)} \dots - \gamma^{(c)}_{(a_p)(b)} T_{(a_1) \dots (a_{p-1})(c)}.$$

Die intrinsische Ableitung ist also in dem Vierbeinformalismus das Analogon zur kovarianten Ableitung, die Richtungsableitung dasjenige zur partiellen Ableitung, und die Ricci-Rotationskoeffizienten entsprechen den Zusammenhangskomponenten Γ_{ijk} . Es bleibt zu bemerken, daß wegen $\eta_{(a)(b),j} = \eta_{(a)(b);j} = (e_{(a)i} e_{(b)}^i)_{;j}$ (beachte: $\eta_{(a)(b)}$ ist ein Skalar!) und der Konstanz von $\eta_{(a)(b)}$, also $\eta_{(a)(b),j} = 0$, die Ricci-Rotationskoeffizienten antisymmetrisch in den ersten beiden Indizes sind,

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \gamma_{(b)(a)(c)} \quad (1.56)$$

[11, §7]. Ferner erhält man die komplex Konjugierte jedes Koeffizienten, indem man den Index 3 durch 4 ersetzt und umgekehrt.

Wir werden im folgenden die Klammern um die Tetradenindizes weglassen, solange sie aus dem Kontext als solche zu erkennen sind.

Lemma 1.28 (J. Friedman). *Sei $\{\zeta_0, \zeta_1\}$ ein Spinbein. Dann gilt*

$$\Gamma_{CDAB'} = \frac{1}{2} \varepsilon^{K'G'} \zeta_C^E \bar{\zeta}_{G'}^{F'} (\zeta_{DE} \bar{\zeta}_{K'F'});_{AB'}.$$

Beweis. Wendet man die Leibniz-Regel auf die rechte Seite an und entwickelt die Terme nach den Regeln des Spinorkalküls, so erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \varepsilon^{K'G'} \left(\zeta_C^E \bar{\zeta}_{G'}^{F'} \zeta_{DE} \bar{\zeta}_{K'F'};_{AB'} + \zeta_C^E \bar{\zeta}_{G'}^{F'} \bar{\zeta}_{K'F'} \zeta_{DE};_{AB'} \right) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{K'G'} \left(\varepsilon_{CD} \bar{\Gamma}_{G'K'AB'} - \varepsilon_{G'K'} \Gamma_{CDAB'} \right) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{K'G'} \varepsilon_{K'G'} \Gamma_{CDAB'} = \Gamma_{CDAB'}; \end{aligned}$$

dabei folgt die erste Gleichung aus (1.20) und (1.47), und die zweite aus der Symmetrie $\bar{\Gamma}_{G'K'AB'} = \bar{\Gamma}_{K'G'AB'}$ und der Antisymmetrie $\varepsilon^{K'G'} = -\varepsilon^{G'K'}$. \square

Damit gilt z.B.

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} &= \Gamma_{0000'} = \frac{1}{2} \varepsilon^{K'G'} \\ &= \frac{1}{2} \left(\zeta_0^E \bar{\zeta}_{1'}^{F'} (\zeta_{0E} \bar{\zeta}_{0'F'});_{00'} \zeta_0^E \bar{\zeta}_{0'}^{F'} (\zeta_{0E} \bar{\zeta}_{1'F'});_{00'} \right) \\ &= \frac{1}{2} (m^j l_{j;00'} - l^j m_{j;00'}) = \frac{1}{2} (m^j l^i l_{j;i} - l^j l^i m_{j;i}) = \frac{1}{2} (\gamma_{311} - \gamma_{131}) \\ &= \gamma_{311}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} &= \gamma_{311}, & \tilde{\rho} &= \gamma_{314}, & \tilde{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\gamma_{211} + \gamma_{341}), \\ \tilde{\sigma} &= \gamma_{313}, & \tilde{\mu} &= \gamma_{243}, & \tilde{\gamma} &= \frac{1}{2} (\gamma_{212} + \gamma_{342}), \\ \tilde{\lambda} &= \gamma_{244}, & \tilde{\tau} &= \gamma_{312}, & \tilde{\alpha} &= \frac{1}{2} (\gamma_{214} + \gamma_{344}), \\ \tilde{\nu} &= \gamma_{242}, & \tilde{\pi} &= \gamma_{241}, & \tilde{\beta} &= \frac{1}{2} (\gamma_{213} + \gamma_{343}), \end{aligned} \tag{1.57}$$

vgl. [11, §102].

Lemma 1.29. *Es gilt*

$$\tilde{\varepsilon} + \bar{\tilde{\varepsilon}} - \tilde{\rho} - \bar{\tilde{\rho}} = \nabla_j l^j, \quad \tilde{\mu} + \bar{\tilde{\mu}} - \tilde{\gamma} - \bar{\tilde{\gamma}} = \nabla_j n^j, \quad \tilde{\beta} - \bar{\tilde{\tau}} + \bar{\tilde{\pi}} - \bar{\tilde{\alpha}} = \nabla_j m^j,$$

Beweis. Es gilt für $a = 1, 2, 3, 4$

$$\nabla_j e_{(a)}^j = \gamma_{1a2} + \gamma_{2a1} - \gamma_{3a4} - \gamma_{4a3}, \tag{1.58}$$

denn $\gamma_{1a2} + \gamma_{2a1} - \gamma_{3a4} - \gamma_{4a3} = (l^i n^j + l^i n^j - m^i \bar{m}^j - m^j \bar{m}^i) \nabla_j e_{(a)i} = g^{ij} \nabla_j e_{(a)i}$. Ferner folgt mit $\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}$ sofort $\tilde{\varepsilon} + \bar{\tilde{\varepsilon}} = \gamma_{211}$, also wegen $\gamma_{aab} = 0$

$$\tilde{\varepsilon} + \bar{\tilde{\varepsilon}} - \tilde{\rho} - \bar{\tilde{\rho}} = \gamma_{211} - \gamma_{314} - \gamma_{413} = \gamma_{111} + \gamma_{211} - \gamma_{314} - \gamma_{413};$$

d.h. mit (1.58) gilt die erste Gleichung. Analog ist $\tilde{\gamma} + \bar{\tilde{\gamma}} = \gamma_{212}$ und

$$\tilde{\mu} + \bar{\tilde{\mu}} - \tilde{\gamma} - \bar{\tilde{\gamma}} = \gamma_{243} + \gamma_{234} - \gamma_{212} = \gamma_{122} - \gamma_{324} - \gamma_{432},$$

sowie $\tilde{\beta} - \bar{\tilde{\alpha}} = \frac{1}{2} (\gamma_{213} + \gamma_{343} - \gamma_{213} - \gamma_{433}) = \gamma_{343}$, d.h.

$$\tilde{\beta} - \bar{\tilde{\tau}} + \bar{\tilde{\pi}} - \bar{\tilde{\alpha}} = \gamma_{343} - \gamma_{312} + \gamma_{231} = \gamma_{132} + \gamma_{231} - \gamma_{433}.$$

,

\square

Kapitel 2

Spinwellen

Zunächst werden hinreichende Bedingungen für Karten (\mathcal{U}, φ) von \mathcal{M} dargestellt, so daß die im folgenden wesentliche Bedingung $g^{00}(x) > 0 \forall x \in \mathcal{U}$ erfüllt ist. Danach wird das allgemeine Setting beschrieben, in dem sich die weitere Theorie der Spinwellenoperatoren bewegen wird. Schließlich werden der Dirac-, der Weyl- und der Maxwell-Operator in einer gekrümmten Raumzeit definiert und unter der Bedingung $g^{00}(x) > 0 \forall x \in \mathcal{U}$ an die Karte (\mathcal{U}, φ) zu Evolutionsgleichungen umgeschrieben. Die Lemmata 2.7, 2.8 und 2.10 bilden das Skelett für die Beweise der Sätze 2.25, 2.29 und 2.36, die die Realteile der i.a. unsymmetrischen Operatoren bestimmen.

2.1 Uhren und Maßstäbe in der Allgemeinen Relativität

Bereits in der Speziellen Relativität, also bei Vernachlässigung der Gravitation, ist die Messung der Zeit und der räumlichen Entfernungen abhängig von dem betrachteten Bezugssystem; diese Abhängigkeit ist verantwortlich für die Erscheinungen der Zeitdilatation und der Lorentz-Kontraktion, also insbesondere für das berühmte Zwillingsparadoxon. Daher sind auch in der Allgemeinen Relativität Uhren und Maßstäbe ausschließlich in Bezugssystemen definiert [32].

Definition 2.1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und zusammenhängend. Ein *Beobachter* oder ein *Bezugssystem* ist eine zeitartige zukunftsgerichtete Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathcal{M}$. Für einen Beobachter gilt also $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) > 0$, $\dot{\gamma}(\tau) \in C_{\gamma(\tau)}$, vgl. [47].

Ein *Karte* oder ein *lokales Koordinatensystem* (\mathcal{U}, φ) oder $(\mathcal{U}, \varphi, U)$ einer Raumzeit \mathcal{M} ist eine offene Menge $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ und ein Diffeomorphismus $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow U$, $U \subset \mathbb{R}^4$ offen. Die vier Funktionen $x^i: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$, mit $(x^0(x), \dots, x^3(x)) = \varphi(x) \in U \forall x \in \mathcal{U}$, sind die *Koordinaten* der Punkte $x \in \mathcal{U}$, und $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ ist die *Koordinatenumgebung*.

Bemerkung 2.2. Sei $(\mathcal{U}, \varphi, U)$ ein lokales Koordinatensystem, und sei $\gamma: I \rightarrow \mathcal{U}$ die Kurve in \mathcal{M} , deren Koordinatendarstellung durch die Kurve $\varphi \circ \gamma: I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^4$, $\tau \mapsto (\tau, x^1, x^2, x^3)$ (x^α fest für $\alpha = 1, 2, 3$) gegeben ist. Dann ist $\dot{\gamma}(\tau) = \partial_0 = \partial/\partial x^0$. Für alle $x \in \mathcal{U}$, in denen $\partial_0 = \partial/\partial x^0$ zeitartig und zukunftsgerichtet ist, d.h. für die

$$g_x(\partial_0, \partial_0) = g_{00}(x) > 0$$

gilt, ist γ ein Beobachter, und die Koordinate x^0 mißt in jedem Punkt der Koordinatenumgebung \mathcal{U} die Zeit bezüglich diesem Beobachter. Mit anderen Worten ist für alle $x \in \mathcal{U}$ mit $g_{00} > 0$ das lokale Koordinatensystem gleichzeitig ein Bezugssystem.

Bemerkung. Für den metrischen Tensor gilt $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$, d.h. mit der Summenkonvention für griechische Indizes $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}$

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} + g_{0\alpha}g^{0\gamma} = \delta_\alpha^\gamma, \quad (2.1)$$

$$g_{\alpha\beta}g^{0\beta} + g_{0\alpha}g^{00} = 0, \quad (2.2)$$

$$g_{0\beta}g^{0\beta} + g_{00}g^{00} = 1 \quad (2.3)$$

Insbesondere besagt $g^{ki}g_{ji} = \delta_i^k$

$$g^{0i}g_{\alpha i} = 0. \quad (2.4)$$

Aus (2.2) folgt $-g_{\alpha\beta}g^{0\beta} = g_{0\alpha}g^{00}$, also aufsummiert über α

$$-g_{\alpha\beta}g^{0\alpha}g^{0\beta} = g_{0\alpha}g^{0\alpha}g^{00}. \quad (2.5)$$

Lemma 2.3. Sei $x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, $(\mathcal{U}, \varphi, U)$ ein lokales Koordinatensystem. Dann gilt:

(a) Die (3×3) -Matrix $(g_{\alpha\beta}(x))$ ist dann und nur dann negativ definit, wenn $g^{00}(x) > 0$.

(b) Ist $g^{00}(x) > 0$, so ist entweder $g_{0\alpha}(x) = g^{0\alpha}(x) = 0$ oder $g_{0\alpha}(x)g^{0\alpha}(x) > 0$.

Beweis. (a) $(g_{\alpha\beta})$ ist negativ definit $\iff \text{span}(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ ist raumartig

$$\iff X \text{ mit } X^i = g^{0i} \text{ ist zeitartig (da mit (2.4) } g(X, \partial_\alpha) = g^{0i}g_{i\alpha} = 0 \forall \alpha, \text{ d.h. } X \perp \partial_\alpha)$$

$$\iff g(X, X) = g_{ij}g^{0i}g^{0j} = g^{00} > 0.$$

(b) Mit (a) ist $g_{\alpha\beta}$ negativ definit. Falls $g_{0\alpha}g^{0\alpha} \neq 0$, so ist $g_{0\alpha}g^{0\alpha} > 0$ wegen (2.5); falls andererseits $g_{0\alpha}g^{0\alpha} = 0$, so ist $g^{0\alpha} = 0$ wegen (2.5), und also mit (2.2) $g_{0\alpha} = 0$. \square

Lemma 2.4. Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ zusammenhängend, und sei $(\mathcal{U}, \varphi, U)$ ein lokales Koordinatensystem, so daß die (3×3) -Matrix $g_{\alpha\beta}$ negativ definit ist $\forall x \in \mathcal{U}$ und ein Punkt $x_0 \in \mathcal{U}$ existiert, in dem ∂_0 zeitartig ist. Dann ist auf ganz \mathcal{U}

$$g^{00} > 0 \quad \text{und} \quad g_{0\alpha}g^{0\alpha} \geq 0.$$

Beweis. Sei $x \in \mathcal{U}$ ein beliebiger Punkt. Sei o.B.d.A. $g_{0\alpha}g^{0\alpha} \neq 0$, denn sonst gilt Lemma 2.3. Aus (2.5) folgt mit der negativen Definitheit

$$-g_{\alpha\beta}g^{0\alpha}g^{0\beta} = g_{0\alpha}g^{0\alpha}g^{00} > 0, \quad (2.6)$$

also notwendig $g^{00} \neq 0 \forall x \in \mathcal{U}$. Speziell im Punkt x_0 gilt $g_{x_0}(\partial_0, \partial_0) = g^{00} > 0$. Wäre nun $g^{00}(x_0) < 0$, so würde mit (2.2) notwendig $g_{0\alpha}g^{0\alpha} = 1 - g_{00}g^{00} > 1$ gelten, also insbesondere $g_{0\alpha}g^{0\alpha}g_{00} < 0$, im Widerspruch zu (2.6). Daher muß $g^{00}(x_0) > 0$ sein, d.h. mit (2.6) $g_{0\alpha}(x_0)g^{0\alpha}(x_0) > 0$. Da \mathcal{U} aber zusammenhängend ist, die metrischen Komponenten stetige Funktionen in $x \in \mathcal{U}$ sind und $g^{00} \neq 0 \forall x \in \mathcal{U}$, gilt auf ganz \mathcal{U} $g^{00} > 0$ und $g_{0\alpha}g^{0\alpha} \geq 0$. \square

Lemma 2.5. Sei \mathcal{U} zusammenhängend und $(\mathcal{U}, \tilde{\varphi})$ eine Karte, so daß $g^{00} > 0$ in \mathcal{U} , und sei $\{\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}}\}$ eine Newman-Penrose-Tetrade. Sei ferner das Vektorfeld ∂_0 zeitartig und zukunftsgerichtet in einem speziellen Punkt $x_* \in \mathcal{U}$. Dann gilt

$$l^0, n^0, l_0, n_0 > 0 \quad \text{auf ganz } \mathcal{U}. \quad (2.7)$$

Beweis. Da ∂_0 zeitartig in x_* ist, gilt $g_{00}(x_*) > 0$. Mit (1.26) ist $g^{00} = 2(l^0n^0 - m^0\bar{m}^0)$, also $l^0(x_*)n^0(x_*) > 0$. Da aber sowohl l^0 als auch n^0 auf der zusammenhängenden Menge \mathcal{U} stetig sind, haben beide dasselbe Vorzeichen und wechseln es nirgends.

Nun ist das Vektorfeld $X^j = g^{0j}$ mit (2.4) und Lemma 2.3 zeitartig und zukunftsgerichtet in x_* , da $g_{x_*}(\partial_0, X) = g_{00}g^{00} > 0$. Da per Definition \mathbf{l} und \mathbf{n} zukunftsgerichtet sind, d. h. $g_{x_*}(X, \mathbf{l}) = g^{0j}(x_*)l_j(x_*) = l^0(x_*) > 0$, und entsprechend $n^0(x_*) > 0$. Da l^0 und n^0 keine Vorzeichenwechsel auf \mathcal{U} haben, folgt allgemein $l^0(x), n^0(x) > 0 \forall x \in \mathcal{U}$. Da ferner \mathbf{l} und \mathbf{n} zeitartig sind, schließen wir aufgrund der negativen Definitheit $l_0l^0 = -l_\alpha l^\alpha = -g_{\alpha\beta}l^\alpha l^\beta > 0$ und $n_0n^0 = -g_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta > 0$. \square

Wir beschränken uns im folgenden auf Koordinatenumgebungen \mathcal{U} , in denen $\{x^1, x^2, x^3\}$ räumliche Koordinaten sind, d. h. $(g_{\alpha\beta})$ negativ definit ist. Sei

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} \quad (2.8)$$

der dreidimensionale metrische Tensor, der die Metrik eines dreidimensionalen Raums beschreibt.

Lemma. Der kontravarianten Komponenten des dreidimensionalen Tensors $\gamma_{\alpha\beta}$ lauten

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} + \frac{g^{0\alpha} g^{0\beta}}{g^{00}}.$$

Beweis. Bestimmen wir $g_{\alpha 0}$ aus (2.2) und setzen es in (2.1) ein, so erhalten wir sofort $-g_{\alpha\beta} \gamma^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$, d.h. $\gamma_{\alpha\beta} \gamma^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$. \square

Bemerkung. Sei $(\mathcal{U}, \varphi, U)$ eine Karte von \mathcal{M} . Eine Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathcal{U}$ induziert eine Kurve $\varphi \circ \gamma: I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^4$ auf die Kartenumgebung U , $\lambda \mapsto (\gamma^i(\lambda)) := \varphi(\gamma(\lambda)) \in U$. Ist $(\mathcal{U}, \varphi, U)$ ein Koordinatensystem, in dem $(g_{\alpha\beta})$ negativ definit ist, so ist γ nur dann Beobachter in einem Punkt $x \in \mathcal{U}$, wenn

$$g_{00} d\gamma^0 d\gamma^0 + 2 g_{0\alpha} d\gamma^0 d\gamma^\alpha > -g_{\alpha\beta} d\gamma^\alpha d\gamma^\beta > 0,$$

wobei $d\gamma^i = \dot{\gamma}^i(\lambda) d\lambda$. Insbesondere ist $\dot{\gamma}^0(\lambda) \neq 0 \forall \lambda \in I$. Ist zusätzlich ∂_0 zukunftsgerichtet an einer Stelle $x_* \in \mathcal{U}$, so ist dort $\dot{\gamma}^0(\lambda_*) > 0$, wobei $\gamma(\lambda_*) = x_*$, denn sonst wäre γ wegen $\partial_0 \gamma|_{x_*} = \dot{\gamma}^0(\lambda_*)$ dort nicht zukunftsgerichtet; ist \mathcal{U} zusätzlich zusammenhängend, so gilt $\dot{\gamma}^0(\lambda) > 0 \forall \lambda \in I$. Die *Eigenzeit* τ ist durch

$$c^2 d\tau^2 = g_{00} d\gamma^0 d\gamma^0 + 2 g_{0\alpha} d\gamma^0 d\gamma^\alpha = \left(g_{00} + 2 g_{0\alpha} \frac{\dot{\gamma}^\alpha}{\dot{\gamma}^0} \right) (\dot{\gamma}^0)^2 d\lambda^2$$

definiert, solange die Funktion $z: I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$z(\lambda) = g_{00} + 2 g_{0\alpha} \frac{\dot{\gamma}^\alpha}{\dot{\gamma}^0}$$

der Bedingung $z > -g_{\alpha\beta} d\gamma^\alpha d\gamma^\beta > 0$ genügt. Damit ist τ durch

$$\tau = \int d\tau = \frac{1}{c} \int \dot{\gamma}^0 \sqrt{z} d\lambda$$

gegeben. Ist γ der spezielle Beobachter mit $d\gamma^0 = dx^0$ aus Bemerkung 2.2, so gilt

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{z} d\lambda.$$

Anschaulich betrachten wir zwei »infinitesimal« entfernte Punkte A und B , d.h. A habe die räumlichen Koordinaten $x^\alpha + dx^\alpha$, und B die Koordinaten x^α , $\alpha = 1, 2, 3$. Die *räumliche Entfernung* zwischen A und B ist dann die Hälfte der Eigenzeit von A zwischen Absendung und Empfang eines Lichtsignals, das von A ausgesandt in B zurück nach A reflektiert wird, siehe Abbildung 2.1. Da für ein Lichtsignal $ds = 0$ ist und wir schreiben können

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + 2 g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha - g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = c^2 d\tau^2 - \gamma_{\alpha\beta},$$

gilt nach Auflösung nach $d\tau$

$$d\tau^{(1)} = -\frac{1}{c} \sqrt{\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}, \quad d\tau^{(2)} = \frac{1}{c} \sqrt{\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta},$$

Damit folgt für das Element ds der räumlichen Entfernung $d\sigma = \frac{c}{2} (d\tau^{(2)} - d\tau^{(1)})$, d.h.

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

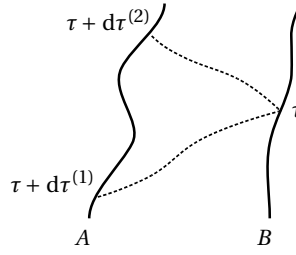


Abbildung 2.1: Die räumliche Entfernung zwischen zwei Raumpunkten A und B

2.2 Spinwellenoperatoren über Raumzeiten

Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, \mathcal{M} eine C^∞ -Mannigfaltigkeit, und sei $(\mathcal{U}, \varphi, U)$ ein lokales Koordinatensystem, so daß $g^{00}(x) > 0$ und mit Lemma 2.3(a) daher $g_{\alpha\beta}$ negativ definit ist $\forall x \in \mathcal{U}$, und so daß für jedes $t \in \mathbb{R}$ mit $(ct, x^1, x^2, x^3) \in U$ die Hyperfläche $U_t \subset U$ des \mathbb{R}^4 ,

$$U_t := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (ct, x^1, x^2, x^3) \in U\} \quad (2.9)$$

zusammenhängend ist. Damit ist die Hyperfläche $\mathcal{N}_t := \varphi^{-1}(U_t) \subset \mathcal{M}$ eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit von \mathcal{M} . Dann definieren wir für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, den Vektorraum $C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^n) := \{f \in C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^n) \mid \text{supp } f \subset\subset U\}$ mit dem Skalarprodukt

$$(\phi, \psi) = \int_{U_t} \phi^* \cdot \psi \sqrt{g} \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad \phi, \psi \in C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^n) \quad (2.10)$$

zur Zeit t , wobei

$$g := |\det(g_{ij})|$$

(vgl. [26, pp. 44]) und ϕ^* die Hermitesche Konjugation des (Spalten-) Vektors $\phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}^n$ bedeutet, d.h. $(\phi^* \psi)(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}$ bezeichnet einfach das Hermitesche Skalarprodukt des \mathbb{C}^n . Sei weiter $\mathcal{H} = \mathcal{H}_t := L^2(U_t)^n$ die Vervollständigung von $C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^n)$ bezüglich der durch (\cdot, \cdot) induzierten Norm; vgl. [60, pp. 108] oder [12]. Sei schließlich

$$\boldsymbol{\tau} = \sqrt{g} \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Wir werden im folgenden die Differentialoperatoren $L: C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^n) \rightarrow C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^n)$,

$$L = (M^0)^{-1}(M^v \partial_v + Z), \quad v = 1, 2, 3$$

betrachten, wobei Z und M^j , $j = 0, \dots, 3$, komplexe $(n \times n)$ -Matrizen sind, wobei wiederum die vier Matrizen M^j zusätzlich Hermitesch sind und $M^0 \in GL(n, \mathbb{C})$.

Definition 2.6. Seien $\phi, \psi \in \mathcal{H}$. Dann ist für ein festes t

$$(\phi, \psi)^\pm = \int_{U_t} \sum_{i=1}^n (\bar{\phi}_i \cdot \psi_i)^\pm(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}$$

mit den punktweise definierten Funktionen

$$(\bar{\phi}_i \cdot \psi_i)^+(\mathbf{x}) = \max(0, \text{Re}(\bar{\phi}_i \cdot \psi_i)(\mathbf{x})) \quad \text{und} \quad (\bar{\phi}_i \cdot \psi_i)^-(\mathbf{x}) = \min(0, \text{Re}(\bar{\phi}_i \cdot \psi_i)(\mathbf{x})). \quad (2.11)$$

Es gilt $\text{Re}(\phi, \psi)_{\mathcal{H}} = (\phi, \psi)^+ + (\phi, \psi)^-$.

Lemma 2.7. Sei $D(t, \mathbf{x}) \forall (ct, \mathbf{x}) \in U$ eine Diagonalmatrix mit reellen positiven Einträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in C^k(U)$, $\lambda_i > 0$, und sei für $(ct, \mathbf{x}) \in U$

$$\lambda_{\max}(t, \mathbf{x}) := \max_{i=1, \dots, n} \lambda_i(t, \mathbf{x}), \quad \lambda_{\min}(t, \mathbf{x}) := \min_{i=1, \dots, n} \lambda_i(t, \mathbf{x}).$$

Dann gilt bei festem $t \forall \phi, \psi \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_t$

$$(\phi, \lambda_{\min} \psi)^+ + (\phi, \lambda_{\max} \psi)^- \leq \operatorname{Re}(\phi, D\psi) \leq (\phi, \lambda_{\min} \psi)^- + (\phi, \lambda_{\max} \psi)^+.$$

Gilt ferner $(\phi, \psi)^\pm = (\eta, \chi)^\pm$ für $\phi, \psi, \eta, \chi \in \mathcal{H}$, so folgt

$$(\phi, D\psi)^\pm = (\eta, D\chi)^\pm.$$

Beweis. Es gilt $\operatorname{Re}(\phi, D\psi)_{\mathcal{H}} = \int \operatorname{Re}(\phi^* D\psi) \boldsymbol{\tau} = \int \operatorname{Re}(\sum \lambda_i \bar{\phi}_i \psi_i) \boldsymbol{\tau} = \int \sum \lambda_i \operatorname{Re}(\bar{\phi}_i \psi_i) \boldsymbol{\tau}$, also $\operatorname{Re}(\phi, D\psi)_{\mathcal{H}} = \int \sum \lambda_i (\bar{\phi}_i \psi_i)^+ \boldsymbol{\tau} + \int \sum \lambda_i (\bar{\phi}_i \psi_i)^- \boldsymbol{\tau}$. Mit den Abschätzungen

$$\sum \lambda_{\min} (\bar{\phi}_i \cdot \psi_i)^+ (\mathbf{x}) \leq \sum \lambda_i (\bar{\phi}_i \cdot \psi_i)^+ (\mathbf{x}) \leq \sum \lambda_{\max} (\bar{\phi}_i \cdot \psi_i)^+ (\mathbf{x})$$

$$\sum \lambda_{\max} (\bar{\phi}_i \cdot \psi_i)^- (\mathbf{x}) \leq \sum \lambda_i (\bar{\phi}_i \cdot \psi_i)^- (\mathbf{x}) \leq \sum \lambda_{\min} (\bar{\phi}_i \cdot \psi_i)^- (\mathbf{x})$$

folgen die Ungleichungen. Mit $(\phi, \psi)^\pm - (\eta, \chi)^\pm = 0$ folgt $\int (\bar{\phi}_i \psi_i)^\pm - (\bar{\eta}_i \chi_i)^\pm \boldsymbol{\tau} = 0$, d.h. $(\bar{\phi}_i \psi_i)^\pm = (\bar{\eta}_i \chi_i)^\pm$ fast überall. Damit ist $(\phi, D\psi)^\pm - (\eta, D\chi)^\pm = \int \sum \lambda_i ((\bar{\phi}_i \psi_i)^\pm - (\bar{\eta}_i \chi_i)^\pm) = 0$ \square

Lemma 2.8. Sei $H = H(t, \mathbf{x})$ eine Hermitesche $(n \times n)$ -Matrix mit den Eigenwerten $\mu_1, \dots, \mu_n \in C^k(U)$, wobei für festes t das Vorzeichen $\operatorname{sgn} \mu_i$ als Funktion von $\mathbf{x} \in U_t$ konstant sei, $\operatorname{sgn} \mu_i(t, \mathbf{x}) = \operatorname{const} \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}_t, i = 1, \dots, n$. Seien weiter

$$\mu_{\min}(t, \mathbf{x}) := \min_{i=1, \dots, n} \mu_i(t, \mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \mu_{\max}(t, \mathbf{x}) := \max_{i=1, \dots, n} \mu_i(t, \mathbf{x}).$$

die Schranken der Eigenwerte bei festem t , sowie

$$\hat{\mu}_{\min} = \min(0, \mu_{\min}(t, \mathbf{x})), \quad \hat{\mu}_{\max} = \max(0, \mu_{\max}(t, \mathbf{x})). \quad (2.12)$$

Dann gilt

$$(a) \quad (\phi, \mu_{\min} \phi) \leq (\phi, H\phi) \leq (\phi, \mu_{\max} \phi);$$

$$(b) \quad (\phi, \hat{\mu}_{\min} \phi) \leq (\phi, H\phi)^- \leq 0 \leq (\phi, H\phi)^+ \leq (\phi, \hat{\mu}_{\max} \phi).$$

Beweis. Sei S eine unitäre Matrix, so daß SHS^* Diagonalgestalt hat. Sei damit $\psi := S\phi$. Dann ist $(\psi, \psi) = (\phi, \phi)$ und $(\psi, \psi)^- = 0$, und es gilt punktweise $\sum \bar{\psi}_i \psi_i = \sum \bar{\phi}_i \phi_i$. Mit $(\phi, H\phi) = (S\phi, SH\phi) = (\psi, SHS^* \psi) \in \mathbb{R}$ und Lemma 2.7 folgt sofort (a). Ebenso ist jeweils $(\phi, H\phi)^\pm = (\psi, SHS^* \psi)^\pm$. Seien durch Umnummerierung μ_1, \dots, μ_p die negativen und μ_{p+1}, \dots, μ_n die nichtnegativen Eigenwerte, $0 \leq p \leq n$. Dann ist

$$(\phi, H\phi)^- = \int \sum_{i=0}^p \mu_i \bar{\psi}_i \psi_i \boldsymbol{\tau} \geq (\phi, \hat{\mu}_{\min} \phi), \quad (\phi, H\phi)^+ = \int \sum_{i=p+1}^n \mu_i \bar{\psi}_i \psi_i \boldsymbol{\tau} \leq (\phi, \hat{\mu}_{\max} \phi),$$

\square

Lemma 2.9. Sei \mathcal{H} ein allgemeiner komplexer Hilbertraum, und seien A_1 und A_2 zwei Operatoren mit Definitionsbereichen $D(A_1), D(A_2) \subset \mathcal{H}$, so daß $D(A_1) \cap D(A_2)$ dicht in \mathcal{H} liegt und $(\phi, A_1 \phi) = (\phi, A_2 \phi) \forall \phi \in D(A_1) \cap D(A_2)$ ist. Dann gilt $A_1 \phi = A_2 \phi \forall \phi \in D(A_1) \cap D(A_2)$.

Beweis. Sei $A = A_1 - A_2$ mit Definitionsbereich $D(A) = D(A_1) \cap D(A_2)$. Dann ist $(\phi, A_1 \phi) = (\phi, A_2 \phi) \Leftrightarrow (\phi, A\phi) = 0 \forall \phi \in D(A_1) \cap D(A_2)$. Die Funktion $q: D(A) \rightarrow \mathbb{R}, q(\phi) = (\phi, A\phi) = 0$ ist eine quadratische Form auf dem Vektorraum $D(A)$. Da dieser komplex ist, definiert sie durch die Polarisierungsidentität eindeutig die Sesquilinearform $s: D(A) \times D(A) \rightarrow \mathbb{C}, s(\phi, \psi) = (\phi, A\psi) \equiv 0$, vgl. [59, pp. 9]. Da $D(A)$ dicht in \mathcal{H} ist, bedeutet dies jedoch $A = 0$. \square

Bemerkung. In dem Beweis von Lemma 2.9 ist wesentlich, daß $D(A_1) \cap D(A_2)$ ein komplexer Vektorraum ist, denn in reellen Vektorräumen existieren Operatoren A (\gg Drehungen um $\pm \frac{\pi}{2}$), so daß die quadratische Form identisch verschwindet, $q(\phi) = (\phi, A\phi) = 0$, die Sesquilinearform $s(\phi, \psi) = (\phi, A\psi)$ dagegen nicht.

Lemma 2.10. Seien M^ν für $\nu = 1, 2, 3$ drei Hermitesche $(n \times n)$ -Matrizen, und sei $B = -M^\nu \partial_\nu$. Dann gilt für $\phi \in C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^n)$

$$2 \operatorname{Re}(\phi, B\psi)_{\mathcal{H}} = \int_{U_t} \phi^* \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu(\sqrt{g} M^\nu) \cdot \phi \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Beweis. Definieren wir das Vektorfeld $F_\phi: \mathcal{N}_t \rightarrow T\mathcal{N}_t$ mit den Komponenten

$$F_\phi^\nu = \phi^* \cdot M^\nu \cdot \phi.$$

Da die drei Matrizen M^ν Hermitesch sind, ist F_ϕ reell. Es gilt für das Dual der 1-Form $(F_\phi)_\nu dx^\nu$,

$$*F_\phi = \sqrt{g} \sum_\nu (-1)^{\nu-1} F_\phi^\nu dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\nu} \wedge \dots \wedge dx^3,$$

also

$$d * F_\phi = \partial_\nu(\sqrt{g} F_\phi^\nu) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

d.h. $d * F = \operatorname{div}^{(3)} F_\phi \boldsymbol{\tau}$ ist die 3-Divergenz des Vektorfeldes $F_\phi^\nu \partial_\nu$, [13, pp. 316], [28, pp. 254]. Weiter gilt mit dem Satz von Stokes

$$\int_{U_t} d * F_\phi = \int_{\partial U_t} * F_\phi.$$

Da das Randintegral jedoch verschwindet ($\operatorname{supp} \phi \subset\subset U_t$), folgt mit

$$\partial_\nu F_\phi^\nu = \partial_\nu \phi^* \cdot M^\nu \cdot \phi + \phi^* \cdot M^\nu \cdot \partial_\nu \phi + \phi^* \cdot \partial_\nu(M^\nu) \cdot \phi$$

sofort

$$\int_{U_t} (\partial_\nu \phi^* \cdot M^\nu \cdot \phi + \phi^* \cdot M^\nu \cdot \partial_\nu \phi) \boldsymbol{\tau} = - \int_{U_t} (\phi^* \cdot \partial_\nu(M^\nu) \cdot \phi + \frac{1}{\sqrt{g}} F_\phi^\nu \partial_\nu(\sqrt{g})) \boldsymbol{\tau}.$$

Mit

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \phi^* \cdot \partial_\nu(\sqrt{g} M^\nu) \cdot \phi = \phi^* \cdot \partial_\nu(M^\nu) \cdot \phi + \frac{1}{\sqrt{g}} F_\phi^\nu \partial_\nu(\sqrt{g}) \boldsymbol{\tau}$$

und

$$(B\phi, \phi) + (\phi, B\phi) = - \int ((M^\nu \partial_\nu \phi)^* \phi + \phi^* M^\nu \partial_\nu \phi) \boldsymbol{\tau} = - \int (\partial_\nu \phi^* M^\nu \phi + \phi^* M^\nu \partial_\nu \phi) \boldsymbol{\tau}$$

folgt wegen $2 \operatorname{Re}(\phi, B\phi) = (B\phi, \phi) + (\phi, B\phi)$ die Behauptung. \square

Bemerkung 2.11. Mit der Hermiteschen Matrix

$$K = \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu(\sqrt{g} M^\nu) \right)$$

besagt Lemma 2.10 also

$$2 \operatorname{Re}(\phi, B\phi) = (\phi, K\phi) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^n). \quad (2.13)$$

Wegen $2 \operatorname{Re}(\phi, B\phi) = (\phi, (B + B^*)\phi)$ folgt mit Lemma 2.9 auf $C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^n)$ sofort $B + B^* = K$, vgl. [12].

2.3 Der Dirac-Operator

Definition 2.12. Im folgenden werden wir die komplexen (2×2) -Matrizen

$$\mathbf{G}^j = \sqrt{2} \begin{pmatrix} l^j & \tilde{m}^j \\ m^j & n^j \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{G}}^j = \sqrt{2} \begin{pmatrix} n^j & -\tilde{m}^j \\ -m^j & l^j \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

d.h. $\mathbf{G}^j = \sqrt{2}(\tilde{\sigma}_{AB'}^j) = \sqrt{2}(\sigma^j_{AB'})^t$, $\tilde{\mathbf{G}}^j = \sqrt{2}(\sigma^{jAB'})$, betrachten.

Definition 2.13. Die vier komplexen (4×4) -Matrizen

$$\boldsymbol{\gamma}^j = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\mathbf{G}}^j \\ \mathbf{G}^j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

heißen *Dirac-Matrizen*; vgl. [18, pp. 52] (Die Dirac-Matrizen dort sind komplex-konjugiert zu den hiesigen).

Bemerkung 2.14. Es gilt

$$\tilde{\mathbf{G}}^i \mathbf{G}^j = 2 \begin{pmatrix} n^i l^j - \tilde{m}^i m^j & n^i \tilde{m}^j - \tilde{m}^i n^j \\ l^i m^j - m^i l^j & l^i n^j - m^i \tilde{m}^j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}^i \tilde{\mathbf{G}}^j = 2 \begin{pmatrix} l^i n^j - \tilde{m}^i m^j & \tilde{m}^i l^j - l^i \tilde{m}^j \\ m^i n^j - n^i m^j & n^i l^j - m^i \tilde{m}^j \end{pmatrix},$$

und damit

$$\boldsymbol{\gamma}^i \boldsymbol{\gamma}^j = 2 \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{G}}^i \mathbf{G}^j & 0 \\ 0 & \mathbf{G}^i \tilde{\mathbf{G}}^j \end{pmatrix}.$$

Mit (1.26) sieht man sofort die Clifford-Dirac-Gleichungen

$$\boldsymbol{\gamma}^i \boldsymbol{\gamma}^j + \boldsymbol{\gamma}^j \boldsymbol{\gamma}^i = 2g^{ij} I_4, \quad (2.14)$$

wobei I_4 die (4×4) -Einheitsmatrix ist.

Lemma 2.15. Sei $S \in GL(4, \mathbb{C})$. Seien weiter $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^i = S \boldsymbol{\gamma}^i S^{-1}$ vier komplexe (4×4) -Matrizen. Dann gelten auch für sie die Clifford-Dirac-Gleichungen $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^i \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^j + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^j \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^i = 2g^{ij} I_4$.

Beweis. $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^i \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^j + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^j \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^i = \boldsymbol{\gamma}^i \boldsymbol{\gamma}^j + \boldsymbol{\gamma}^j \boldsymbol{\gamma}^i = 2g^{ij} S I_4 S^{-1} = 2g^{ij} I_4$. \square

Definition 2.16. Die vier Matrizen

$$\boldsymbol{\gamma}_{\text{SR}}^j = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^j + \tilde{\mathbf{G}}^j & \mathbf{G}^j - \tilde{\mathbf{G}}^j \\ -\mathbf{G}^j + \tilde{\mathbf{G}}^j & -\mathbf{G}^j - \tilde{\mathbf{G}}^j \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

heißen *Dirac-Matrizen der Standarddarstellung*, vgl. [46, pp. 51]. Mit Definition 2.12 ist also

$$\boldsymbol{\gamma}_{\text{SR}}^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} l^j + n^j & 0 & l^j - n^j & 2\tilde{m}^j \\ 0 & l^j + n^j & 2m^j & n^j - l^j \\ n^j - l^j & -2\tilde{m}^j & -l^j - n^j & 0 \\ -2m^j & l^j - n^j & 0 & -l^j - n^j \end{pmatrix},$$

Da diese Matrizen aus den Dirac-Matrizen $\boldsymbol{\gamma}$ durch $\boldsymbol{\gamma}_{\text{SR}}^j = S \boldsymbol{\gamma}^j S^{-1}$ mit

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix},$$

entstehen ($S = S^{-1}$), gilt mit Lemma 2.15 $\boldsymbol{\gamma}_{\text{SR}}^i \boldsymbol{\gamma}_{\text{SR}}^j + \boldsymbol{\gamma}_{\text{SR}}^j \boldsymbol{\gamma}_{\text{SR}}^i = 2g^{ij} I_4$.

Bemerkung 2.17. Sei $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ eine Raumzeit, und sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ eine offene Koordinatenumgebung, so daß für die Komponenten des metrischen Tensors $g^{00}(x) \neq 0 \forall x \in \mathcal{U}$ gilt. Dann sind \mathbf{G}^0 und $\tilde{\mathbf{G}}^0$ auf ganz \mathcal{U} invertierbar, und es ist

$$(\mathbf{G}^0)^{-1} = \frac{1}{g^{00}} \tilde{\mathbf{G}}^0 \quad \text{und} \quad (\tilde{\mathbf{G}}^0)^{-1} = \frac{1}{g^{00}} \mathbf{G}^0$$

denn mit (1.26) bzw. der Clifford-Dirac-Gleichung (2.14) gilt $\mathbf{G}^0 \tilde{\mathbf{G}}^0 = \tilde{\mathbf{G}}^0 \mathbf{G}^0 = g^{00} I_2$. Damit ist auch $\boldsymbol{\gamma}(x)$ auf \mathcal{U} invertierbar, und es gilt

$$(\boldsymbol{\gamma}^0)^{-1} = \frac{1}{g^{00}} \boldsymbol{\gamma}^0. \quad (2.15)$$

Beispiel 2.18. Sei $\mathcal{M} := \mathbb{R}^4$, und seien $l^j = n_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)$, $n^j = l_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$, $m^j = -m_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0)$, ($j = 0, 1, 2, 3$) ist mit (1.26) $g_{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$; $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ ist also der Minkowski-Raum. Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma^0_{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0^{AB'}, & \sigma^1_{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1^{AB'}, \\ \sigma^2_{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_2^{AB'}, & \sigma^3_{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3^{AB'}. \end{aligned}$$

Die Matrizen $\mathbf{G}^\alpha = -\tilde{\mathbf{G}}^\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, sind die Pauli-Matrizen, und $\mathbf{G}^0 = \tilde{\mathbf{G}}^0 = I_2$. Ferner sind $\boldsymbol{\gamma}^i$, $i = 0, 1, 2, 3, 5$, die üblichen Dirac-Matrizen der Quantenfeldtheorie; s. z.B. [56, pp. 68], [43] oder [13, p. 176].

Definition 2.19. Sei m_e die Masse eines Elementarteilchens, h das Plancksche Wirkungsquantum, $\hbar = h/2\pi$ und c die Lichtgeschwindigkeit. Sei dann

$$\mu_e := \frac{m_e c}{\sqrt{2} \hbar}. \quad (2.16)$$

$\sqrt{2}/\mu_e$ ist die Compton-Wellenlänge eines Teilchens der Masse m_e . Die kovariante Dirac-Gleichung eines Teilchens der Masse ist definiert durch

$$\nabla_{AB'} P^A + i\mu_e Q_{B'} = 0, \quad \nabla_{AB'} \tilde{Q}^A + i\mu_e \tilde{P}_{B'} = 0 \quad (2.17)$$

($A, B = 0, 1$). Dies ist äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (l^j \partial_j + \tilde{\epsilon} - \tilde{\rho}) P^0 + (\tilde{m}^j \partial_j + \tilde{\pi} - \tilde{\alpha}) P^1 &= i\mu_e Q^{1'} \\ (m^j \partial_j + \tilde{\beta} - \tilde{\tau}) P^0 + (n^j \partial_j + \tilde{\mu} - \tilde{\gamma}) P^1 &= -i\mu_e Q^{0'} \\ (l^j \partial_j + \tilde{\epsilon} - \tilde{\rho}) Q^{0'} + (\tilde{m}^j \partial_j + \tilde{\pi} - \tilde{\alpha}) Q^{1'} &= -i\mu_e P^1 \\ (\tilde{m}^j \partial_j + \tilde{\beta} - \tilde{\tau}) P^0 + (n^j \partial_j + \tilde{\mu} - \tilde{\gamma}) P^1 &= i\mu_e P^0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

vgl. [11, pp. 543].

Mit den folgenden Definitionen werden wir die Dirac-Gleichung umschreiben:

Definitionen 2.20. Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ eine Koordinatenumgebung mit $g^{00}(x) > 0 \forall x \in \mathcal{U}$, und seien $\boldsymbol{\gamma}_{\text{SR}}$ die Dirac-Matrizen der Standardrepresentation. Dann definieren wir die Matrizen $\boldsymbol{\alpha}^j =$

$\gamma_{\text{SR}}^0 \gamma_{\text{SR}}^j / g^{00}$, d.h. explizit

$$\alpha^j = \frac{1}{g^{00}} \begin{pmatrix} l^0 n^j + n^0 l^j & \bar{m}^0(l^j - n^j) & n^0 l^j - l^0 n^j & \bar{m}^j(l^0 + n^0) \\ -2\bar{m}^0 m^j & -\bar{m}^j(l^0 - n^0) & & -\bar{m}^0(l^j + n^j) \\ m^0(n^j - l^j) & l^0 n^j + n^0 l^j & m^j(l^0 + n^0) & l^0 n^j - n^0 l^j \\ -m^j(n^0 - l^0) & -2m^0 \bar{m}^j & -m^0(l^j + n^j) & \\ n^0 l^j - l^0 n^j & \bar{m}^j(l^0 + n^0) & l^0 n^j + n^0 l^j & \bar{m}^j(n^0 - l^0) \\ -\bar{m}^0(l^j + n^j) & -\bar{m}^0(l^j + n^j) & -2\bar{m}^0 m^j & -\bar{m}^0(n^j - l^j) \\ m^j(l^0 + n^0) & l^0 n^j - n^0 l^j & m^j(l^0 - n^0) & l^0 n^j + n^0 l^j \\ -m^0(l^j + n^j) & & -m^0(l^j - n^j) & -2m^0 \bar{m}^j \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

(beachte: mit (2.15) ist $\alpha^0 = \gamma_{\text{SR}}^0 (\gamma_{\text{SR}}^0)^{-1} = I_4$). Dies ist der Verallgemeinerung der üblichen α -Matrizen in krummlinigen Koordinaten, und mit der Nulltetrad aus Bsp. 2.18 ergeben sich diese, vgl. [43], [56]. Seien ferner

$$\Xi := \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} - \tilde{\rho} & \tilde{\pi} - \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} - \tilde{\tau} & \tilde{\mu} - \tilde{\gamma} \end{pmatrix}, \quad \Upsilon := \begin{pmatrix} \bar{\mu} - \bar{\gamma} & -\bar{\beta} + \bar{\tau} \\ -\bar{\pi} + \bar{\alpha} & \bar{\varepsilon} - \bar{\rho} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\phi := \begin{pmatrix} P^0 \\ P^1 \\ Q^{1'} \\ -Q^{0'} \end{pmatrix} \quad \psi := S\phi = \begin{pmatrix} P^0 + Q^{1'} \\ P^1 - Q^{0'} \\ P^0 - Q^{1'} \\ P^1 + Q^{0'} \end{pmatrix},$$

und

$$Z := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} \Xi + \Upsilon & \Xi - \Upsilon \\ -(\Xi - \Upsilon) & -(\Xi + \Upsilon) \end{pmatrix} - i\mu_e I_4 \right). \quad (2.21)$$

Satz 2.21. Sei (\mathcal{M}, g) eine Raumzeit, und sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ eine Koordinatenumgebung, so daß $g^{00}(x) > 0 \forall x \in \mathcal{U}$. Mit dem Operator $A: C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^4) \rightarrow C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^4)$,

$$A = c\alpha^\nu \partial_\nu - \frac{c}{g^{00}} \gamma_{\text{SR}}^0 Z \quad (\nu = 1, 2, 3) \quad (2.22)$$

und mit der Bezeichnung $t = x^0/c$ für die (Koordinaten-) Zeit läßt sich die kovariante Dirac-Gleichung als Evolutionsgleichung schreiben,

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = A\psi. \quad (2.23)$$

Beweis. Zunächst liest sich die Dirac-Gleichung als

$$\left[\gamma^j \partial_j + \sqrt{2} \begin{pmatrix} -i\mu_e & 0 & \bar{\mu} - \bar{\gamma} & -\bar{\beta} + \bar{\tau} \\ 0 & -i\mu_e & -\bar{\pi} + \bar{\alpha} & \bar{\varepsilon} - \bar{\rho} \\ \tilde{\varepsilon} - \tilde{\rho} & \tilde{\pi} - \tilde{\alpha} & -i\mu_e & 0 \\ \tilde{\beta} - \tilde{\tau} & \tilde{\mu} - \tilde{\gamma} & 0 & -i\mu_e \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} P^0 \\ P^1 \\ Q^{1'} \\ -Q^{0'} \end{pmatrix} = 0,$$

also

$$\left[\gamma^j \partial_j + \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \Upsilon \\ \Xi & 0 \end{pmatrix} - i\sqrt{2}\mu_e \right] \phi = 0. \quad (2.24)$$

Weiter ist $[\dots]\phi = 0$ äquivalent zu $S[\dots]S^{-1}\psi =$, d.h. zu

$$\left[\gamma_{\text{SR}}^j \partial_j + Z \right] \psi = 0,$$

da

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \Xi + \Upsilon & \Xi - \Upsilon \\ -(\Xi - \Upsilon) & -(\Xi + \Upsilon) \end{pmatrix} - i\mu_e I_4 \right) \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}.$$

Umstellen nach $\gamma_{\text{SR}}^0 \partial_0 \psi$ und Multiplikation mit $c(\gamma_{\text{SR}}^0)^{-1} = c\gamma_{\text{SR}}^0 / g^{00}$ und $x^0 = ct$ liefert die Behauptung. \square

Definition 2.22. Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.21 gegeben. Dann heißt der Operator (2.22) *Dirac-Operator* eines Teilchens mit der Masse m_e und dem Spin $s = \frac{1}{2}$ in einer gekrümmten Raumzeit. Er wirkt auf Funktionen $\psi: U \rightarrow \mathbb{C}^4$, den *Spinorfunktionen*. Mit (2.22) folgt

$$\gamma_{\text{SR}}^0 A = -c (\gamma_{\text{SR}}^v \partial_v + Z) \quad (2.25)$$

Ferner sei betont, daß die Gleichungen (2.17), (2.18) und (2.24) äquivalent sind.

Lemma 2.23. Sei H eine Hermitesche (4×4) -Matrix der Gestalt

$$H = \begin{pmatrix} a & 0 & b & c \\ 0 & a & \bar{c} & -b \\ b & c & a & 0 \\ \bar{c} & -b & 0 & a \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}. \quad (2.26)$$

Dann hat H die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = a \pm \sqrt{b^2 + c\bar{c}}.$$

D.h. H hat einen Eigenwert der Vielfachheit 4 für $b = c = 0$, und zwei mit doppelter Vielfachheit sonst.

Beweis. Es gilt $\det H = a^4 - 2a^2 c\bar{c} - 2a^2 b^2 + 2b^2 c\bar{c} + b^4 + c^2 \bar{c}^2 = (a^2 - b^2 - c\bar{c})^2$, d.h. insbesondere für das charakteristische Polynom $\det(\lambda I - H) = ((\lambda - a)^2 - b^2 - c\bar{c})^2$. Damit erhält man die zwei Eigenwerte mit doppelter Vielfachheit. Da $b^2, c\bar{c} \geq 0$, gilt $\lambda_1 = \lambda_2$ dann und nur dann, wenn $b = c = 0$. \square

Lemma 2.24. Sei M_{Dirac}^j für $j = 0, \dots, 3$ jeweils die Hermitesche Matrix

$$M_{\text{Dirac}}^j := T \gamma_{\text{SR}}^j \quad T = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix},$$

also

$$M_{\text{Dirac}}^j = \begin{pmatrix} l^j + n^j & 0 & l^j - n^j & 2\bar{m}^j \\ 0 & l^j + n^j & 2m^j & n^j - l^j \\ l^j - n^j & 2\bar{m}^j & l^j + n^j & 0 \\ 2m^j & n^j - l^j & 0 & l^j + n^j \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

(Die M_{Dirac}^j sind die Hermitesch gemachten Dirac-Matrizen γ_{SR}^j). Dann gilt:

- (a) $T M_{\text{Dirac}}^i T M_{\text{Dirac}}^j = \gamma_{\text{SR}}^i \gamma_{\text{SR}}^j$;
- (b) $\alpha^v = (M_{\text{Dirac}}^0)^{-1} M_{\text{Dirac}}^v$ für $v = 1, 2, 3$;
- (c) Für die Eigenwerte von M_{Dirac}^0 gilt

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(l^0 + n^0 \pm \sqrt{(l^0 - n^0)^2 + 4m^0 \bar{m}^0} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(l^0 + n^0 \pm \sqrt{(l^0 + n^0)^2 - 2g^{00}} \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

d.h. M_{Dirac}^0 hat nur positive Eigenwerte, und zwar einen mit Vielfachheit 4 für $l^0 = n^0$ und $m^0 = 0$, zwei je mit Vielfachheit 2 sonst.

(d) Mit dem Differentialoperator $B: C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^4) \rightarrow C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^4)$,

$$B := -cM_{\text{Dirac}}^v \partial_v \quad (2.29)$$

und der (4×4) -Matrix

$$Z' = -cTZ \quad (2.30)$$

gilt für den Dirac-Operator

$$A = (M_{\text{Dirac}}^0)^{-1}(B + Z'). \quad (2.31)$$

Beweis. (a) Wegen $TT = I_4$ folgt $TM_{\text{Dirac}}^j = \gamma_{\text{SR}}^j$.

(b) Mit $TM_{\text{Dirac}}^0 TM_{\text{Dirac}}^0 = \gamma_{\text{SR}}^0 \gamma_{\text{SR}}^0 = g^{00} I_4$ folgt $(M_{\text{Dirac}}^0)^{-1} = 1/g^{00} TM_{\text{Dirac}}^0 T$, d.h. es gilt $\alpha^v = 1/g^{00} \gamma_{\text{SR}}^0 \gamma_{\text{SR}}^v = 1/g^{00} TM_{\text{Dirac}}^0 TM_{\text{Dirac}}^v = (M_{\text{Dirac}}^0)^{-1} M_{\text{Dirac}}^v$.

(c) Es gilt $\det(\lambda I_4 - M_{\text{Dirac}}^0) = \frac{1}{4} \det(\lambda' I_4 - \sqrt{2} M_{\text{Dirac}}^0)$ mit $\lambda' = \sqrt{2}\lambda$. Die Eigenwerte λ' der Matrix $\sqrt{2} M_{\text{Dirac}}^0$ lauten mit Lemma 2.23

$$\lambda'_{1/2} = \left(l^0 + n^0 \pm \sqrt{(l^0 + n^0)^2 - 4(l^0 n^0 - m^0 \bar{m}^0)} \right).$$

Mit $g^{00} = 2(l^0 n^0 - m^0 \bar{m}^0)$ und den binomischen Formeln folgen die beiden Gleichungen in (c) für $\lambda = \lambda'/\sqrt{2}$.

(d) Mit (2.25) ist $M_{\text{Dirac}}^0 A = T \gamma_{\text{SR}}^0 A = -cT \gamma_{\text{SR}}^v \partial_v - cTZ = B + Z'$. \square

Bemerkung. Für die Nulltetrad aus Bsp. 2.18, d.h. für kartesische Koordinaten im flachen Fall, gilt mit (2.28) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Satz 2.25. Seien λ_1 und λ_2 die beiden Eigenwerte von M_{Dirac}^0 , $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$, und sei $\lambda_{\max}(t, \mathbf{x}) := \lambda_1(t, \mathbf{x})/g^{00}(ct, \mathbf{x})$. Sei weiter mit (2.27) und (2.30)

$$H = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_v (\sqrt{g} M_{\text{Dirac}}^0) + Z' + Z'^*. \quad (2.32)$$

Dann gilt für den Dirac-Operator A und für jedes $\phi \in C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^4)$

$$\text{Re}(\phi, A\phi) = \frac{1}{2}(\phi, DH\phi) \quad (2.33)$$

für eine Diagonalmatrix D mit Einträgen λ_i/g^{00} , und

$$\frac{1}{2}(\phi, \lambda_{\max} \hat{\mu}_{\min} \phi) \leq \text{Re}(\phi, A\phi) \leq \frac{1}{2}(\phi, \lambda_{\max} \hat{\mu}_{\max} \phi) \quad (2.34)$$

wobei μ_{\min} und μ_{\max} die Schranken der Eigenwerte von H aus Lemma 2.8 sind.

Beweis. Sei S eine unitäre Matrix, so daß $D = S(M_{\text{Dirac}}^0)^{-1} S^*$ Diagonalgestalt hat. Mit

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(l^0 + n^0 + \sqrt{(l^0 + n^0)^2 - 2g^{00}} \right) \left(l^0 + n^0 - \sqrt{(l^0 + n^0)^2 - 2g^{00}} \right) = g^{00}$$

ist $\lambda_1^{-1} = \lambda_2/g^{00}$ und $\lambda_2^{-1} = \lambda_1/g^{00}$, d.h. λ_1/g^{00} und λ_2/g^{00} sind die Einträge von D . Da S unitär ist, folgt insbesondere $\text{Re}(S\phi, S(B + Z')\phi)$, d.h. es ist $2\text{Re}(\phi, (B + Z')\phi) = (\phi, (B + B^* + Z' + Z'^*)\phi)$. Wegen Lemma 2.10 gilt nun $B + B^* + Z' + Z'^* = H$, und damit $2(S\phi, S(B + Z')\phi)^\pm = (\phi, H\phi)^\pm$. Mit Lemma 2.7 folgt

$$\begin{aligned} (\phi, \lambda_{\min} H\phi)^+ + (\phi, \lambda_{\max} H\phi)^- &\leq 2\text{Re}(S\phi, DS(B + Z')\phi) \\ &\leq (\phi, \lambda_{\min} H\phi)^- + (\phi, \lambda_{\max} H\phi)^+ \end{aligned} \quad (2.35)$$

und mit Lemma 2.8 (b) schließlich

$$\begin{aligned}(\phi, \lambda_{\min} H \phi)^+ + (\phi, \lambda_{\max} H \phi)^- &\geq (\phi, \lambda_{\max} \hat{\mu}_{\min} \phi) \\ (\phi, \lambda_{\min} H \phi)^- + (\phi, \lambda_{\max} H \phi)^+ &\leq (\phi, \lambda_{\max} \hat{\mu}_{\max} \phi)\end{aligned}$$

Da mit Lemma 2.24 (d) $A = (M_{\text{Dirac}}^0)^{-1}(B + Z')$ ist, folgt mit $(M_{\text{Dirac}}^0)^{-1} = S^* DS$ und Lemma 2.7 sofort $A + A^* = DH$, also (2.33), sowie $A = S^* DS(B + Z')$, d.h.

$$\text{Re}(\phi, A\phi) = \text{Re}(\phi, S^* DS(B + Z')\phi) = \text{Re}(S\phi, DS(B + Z')\phi).$$

Mit (2.35) folgt (2.34). □

Satz 2.26. Sei (\mathcal{M}, g) eine Raumzeit, und sei $(\mathcal{U}, \varphi, U)$ ein lokales Koordinatensystem, so daß $g^{00}(x) > 0 \forall x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ gilt. Sei ferner $\{\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}}\}$ eine Nulltetrad mit den Spinkoeffizienten (1.57). Dann hat die Matrix H in (2.32) die Gestalt

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & h_2 & h_3 \\ 0 & h_1 & \bar{h}_3 & -h_2 \\ h_2 & h_3 & h_1 & 0 \\ \bar{h}_3 & -h_2 & 0 & h_1 \end{pmatrix}$$

mit

$$h_1 = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \partial_0(\sqrt{g}(l^0 + n^0)), \quad h_2 = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \partial_0(\sqrt{g}(l^0 - n^0)), \quad h_3 = -\sqrt{\frac{2}{g}} \partial_0(\sqrt{g} \bar{m}^0).$$

Beweis. Da

$$\Xi + \Xi^* = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} + \bar{\tilde{\varepsilon}} - \tilde{\rho} - \bar{\tilde{\rho}} & \tilde{\pi} - \bar{\tilde{\alpha}} + \bar{\tilde{\beta}} - \bar{\tilde{\tau}} \\ \bar{\tilde{\beta}} - \bar{\tilde{\tau}} + \bar{\tilde{\pi}} - \bar{\tilde{\alpha}} & \bar{\tilde{\mu}} + \bar{\tilde{\mu}} - \bar{\tilde{\gamma}} - \bar{\tilde{\gamma}} \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

und

$$\Upsilon + \Upsilon^* = \begin{pmatrix} \bar{\tilde{\mu}} + \bar{\tilde{\mu}} - \bar{\tilde{\gamma}} - \bar{\tilde{\gamma}} & \bar{\tilde{\alpha}} - \bar{\tilde{\pi}} - \bar{\tilde{\beta}} + \bar{\tilde{\tau}} \\ \bar{\tilde{\alpha}} - \bar{\tilde{\pi}} - \bar{\tilde{\beta}} + \bar{\tilde{\tau}} & \tilde{\varepsilon} + \bar{\tilde{\varepsilon}} - \tilde{\rho} - \bar{\tilde{\rho}} \end{pmatrix},$$

gilt, hat $Z' + Z'^*$ wegen

$$Z' + Z'^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Xi + \Xi^* + \Upsilon + \Upsilon^* & \Xi + \Xi^* - (\Upsilon + \Upsilon^*) \\ \Xi + \Xi^* - (\Upsilon + \Upsilon^*) & \Xi + \Xi^* + \Upsilon + \Upsilon^* \end{pmatrix},$$

die symmetrische Gestalt wie in Lemma 2.23. Damit gilt

$$h_1 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu(\sqrt{g}(l^\nu + n^\nu)) - \frac{1}{\sqrt{g}} (\tilde{\varepsilon} + \bar{\tilde{\varepsilon}} - \tilde{\rho} - \bar{\tilde{\rho}} + \bar{\tilde{\mu}} + \bar{\tilde{\mu}} - \bar{\tilde{\gamma}} - \bar{\tilde{\gamma}}),$$

Mit Lemma 1.29 ist einerseits $\nabla_j l^j + \nabla_j n^j = \tilde{\varepsilon} + \bar{\tilde{\varepsilon}} - \tilde{\rho} - \bar{\tilde{\rho}} + \bar{\tilde{\mu}} + \bar{\tilde{\mu}} - \bar{\tilde{\gamma}} - \bar{\tilde{\gamma}}$; andererseits gilt für einen beliebigen Vektor X^j

$$\nabla_j X^j = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0(\sqrt{g} X^0) + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu(\sqrt{g} X^\nu),$$

d.h. es folgt die Behauptung für h_1 . Analog ergeben sich h_2 und h_3 . □

2.4 Masselose Spinwellenoperatoren

Masselose Wellenfelder mit Spin $s = \frac{n}{2}$, $n \in \{1, 2\}$, werden in einer Koordinatenumgebung $(\mathcal{U}, \varphi, U)$ mit $g^{00}(x) > 0 \forall x \in \mathcal{U}$ durch einen Evolutionsoperator

$$L^{(s)} : C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^{2s+1}) \rightarrow C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^{2s+1}) \quad (2.37)$$

der Form $L^{(s)} = L_t^{(s)} = (M_{(s)}^0)^{-1}(M_{(s)}^\nu \partial_\nu + Z^{(s)})$, $\nu = 1, 2, 3$, beschrieben; dabei sind $M_{(s)}^j$, $j = 0, 1, 2, 3$, und $Z^{(s)}$ jeweils $(2s+1) \times (2s+1)$ -Matrizen mit Einträgen aus $C^k(U_t, \mathbb{C})$, und die Matrizen $M_{(s)}^j$ sind Hermitesch. Ferner ist $C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^{2s+1})$ mit dem Skalarprodukt $(\phi, \psi)_s : C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^{2s+1}) \times C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^{2s+1}) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(\phi, \psi)_s = \int_{U_t} \phi^* \psi \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad (2.38)$$

ein Prähilbertraum. Sei $\mathcal{H}^{(s)} = \mathcal{H}_t^{(s)} = L^2(U_t, \mathbb{C}^{2s+1})$ die Vervollständigung von $C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^{2s+1})$ bzgl. $(\cdot, \cdot)_s$.

a) Der Weyl-Operator

Für masselose Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, *Weyl-Neutrinos*, zerfällt die kovariante Dirac-Gleichung (2.24) mit $\mu_e = 0$ in zwei unabhängige komplex-konjugierte Gleichungssysteme (vgl. Definition 2.13 und die Gleichungen (2.20))

$$(\mathbf{G}^j \partial_j + \sqrt{2}\Xi) \begin{pmatrix} P^0 \\ P^1 \end{pmatrix} = 0, \quad (\tilde{\mathbf{G}}^j \partial_j + \sqrt{2}\Upsilon) \begin{pmatrix} Q^{1'} \\ -Q^{0'} \end{pmatrix} = (\mathbf{G}^j \partial_j + \sqrt{2}\Xi)^* \begin{pmatrix} Q^{0'} \\ Q^{1'} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.39)$$

oder äquivalent $\nabla_{AB'} P^A = 0$, $\bar{\nabla}_{AB'} Q^A = 0$, vgl. (2.17). Mit

$$M_{(\frac{1}{2})}^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{G}^j \quad \text{und} \quad Z^{(\frac{1}{2})} = -\Xi$$

läßt sich das erste Gleichungssystem aus (2.39) umschreiben zu

$$M_{(\frac{1}{2})}^0 \partial_0 \begin{pmatrix} P^0 \\ P^1 \end{pmatrix} = \left(-M_{(\frac{1}{2})}^\nu \partial_\nu + Z^{(\frac{1}{2})} \right) \begin{pmatrix} P^0 \\ P^1 \end{pmatrix}.$$

Sei \mathcal{U} Koordinatenumgebung mit $g^{00} > 0$ auf ganz \mathcal{U} . Dann gilt mit Bemerkung 2.17

$$(M_{(\frac{1}{2})}^0)^{-1} = \frac{2}{g^{00}} \tilde{\mathbf{G}}^j, \quad (2.40)$$

und der *Weyl-Operator* $L^{(\frac{1}{2})} : C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^2) \rightarrow C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^2)$ lautet

$$L^{(\frac{1}{2})} := c(M_{(\frac{1}{2})}^0)^{-1} \left(-(M_{(\frac{1}{2})}^\nu \partial_\nu)^{-1} + Z^{(\frac{1}{2})} \right). \quad (2.41)$$

Damit und mit der *Spinorfunktion* $\phi = (P^0, P^1)^t \in C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^2)$ läßt sich die *Weyl-Gleichung* $\nabla_{AB'} P^A = 0$ durch die Evolutionsgleichung

$$\partial_t \phi = L^{(\frac{1}{2})} \phi \quad (2.42)$$

ausdrücken, wobei wieder $t = x^0/c$ die Zeit darstellt, d.h. $\partial_t = c\partial_0$.

Lemma 2.27. *Die Eigenwerte von $M_{(\frac{1}{2})}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{G}^0$ sind positiv und lauten*

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \left(l^0 + n^0 \pm \sqrt{(l^0 + n^0)^2 - 2g^{00}} \right). \quad (2.43)$$

Beweis. $\det(\lambda I_2 - M_{(\frac{1}{2})}^0) = \lambda^2 - (l^0 + n^0)\lambda + l^0 n^0 - m^0 \bar{m}^0 = \lambda^2 - (l^0 + n^0)\lambda + \frac{1}{2}g^{00} = 0.$ \square

Definition 2.28. Sei

$$H = -\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0 \left(\sqrt{g} \begin{pmatrix} l^0 & m^0 \\ \bar{m}^0 & n^0 \end{pmatrix} \right), \quad (2.44)$$

d.h. $H = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0 \left(\sqrt{g} M_{(\frac{1}{2})}^0 \right).$

Satz 2.29. Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ eine Koordinatenumgebung, auf der überall $g^{00} > 0$ ist. Dann gilt für den Weyl-Operator $L^{(\frac{1}{2})}$ und der Diagonalmatrix D mit Einträgen $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}$ der Eigenwerte aus (2.43)

$$2\text{Re} \left(\phi, L^{(\frac{1}{2})} \phi \right)_{(\frac{1}{2})} = c \left(\phi, D H^{(\frac{1}{2})} \phi \right)_{(\frac{1}{2})} \quad \phi \in C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^2)$$

Beweis. Mit Lemma 2.10 gilt $2\text{Re} \left(\phi, -M_{(\frac{1}{2})}^v \partial_v \phi \right)_{\frac{1}{2}} = \left(\phi, K \phi \right)_{\frac{1}{2}}$, wobei

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_v \left(\sqrt{g} M_{(\frac{1}{2})}^v \right)$$

ist (vgl. (2.13)). Einerseits ist $\nabla_j M_{(\frac{1}{2})}^j = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0 (\sqrt{g} M_{(\frac{1}{2})}^0) + K$, andererseits ist mit Lemma 1.29 und (2.20) $\nabla_j M_{(\frac{1}{2})}^j = -(Z^{(\frac{1}{2})} + Z^{(\frac{1}{2})}) = \Xi + \Xi^*$. Da mit (2.41) also

$$2\text{Re} \left(\phi, L^{(\frac{1}{2})} \phi \right)_{\frac{1}{2}} = c \left(\phi, D(K + Z^{(\frac{1}{2})} + Z^{(\frac{1}{2})}) \phi \right)_{\frac{1}{2}}$$

gilt, folgt die Behauptung, vgl. Satz 2.25. \square

b) Der Maxwell-Operator

Definition 2.30. Sei F_{ij} der antisymmetrische Maxwell-Tensor, z.B. [47]. Dann lauten die Maxwell-Gleichungen in einer gekrümmten Raumzeit,

$$F_{[ij;k]} = 0, \quad g^{ik} F_{ij;k} = 0,$$

mit den drei komplexen Skalaren

$$\begin{aligned} \phi_0 &:= F_{(1)(3)} = F_{ij} l^i m^j, \\ \phi_1 &:= \frac{1}{2} (F_{(1)(2)} + F_{(4)(3)}) = \frac{1}{2} F_{ij} (l^i n^j + \bar{m}^i m^j), \\ \phi_2 &:= F_{(4)(2)} = F_{ij} \bar{m}^i n^j \end{aligned}$$

im Newman-Penrose-Formalismus

$$\begin{aligned} l^j \partial_j \phi_1 - \bar{m}^j \partial_j \phi_0 &= (\bar{\pi} - 2\bar{\alpha}) \phi_0 + 2\bar{\rho} \phi_1 - \bar{\kappa} \phi_2, \\ l^j \partial_j \phi_2 - \bar{m}^j \partial_j \phi_1 &= -\tilde{\lambda} \phi_0 + 2\bar{\pi} \phi_1 + (\bar{\rho} - 2\bar{\epsilon}) \phi_2, \\ m^j \partial_j \phi_1 - n^j \partial_j \phi_0 &= (\bar{\mu} - 2\bar{\gamma}) \phi_0 + 2\bar{\tau} \phi_1 - \bar{\sigma} \phi_2, \\ m^j \partial_j \phi_2 - n^j \partial_j \phi_1 &= -\tilde{\nu} \phi_0 + 2\bar{\mu} \phi_1 - (\bar{\tau} - 2\bar{\beta}) \phi_2, \end{aligned} \quad (2.45)$$

vgl. [11, pp. 51] oder [31, p. 85]. Daraus folgt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} n^j & m^j & 0 \\ \bar{m}^j & l^j + n^j & m^j \\ 0 & \bar{m}^j & l^j \end{pmatrix} \partial_j \begin{pmatrix} \phi_0 \\ -\phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\bar{\gamma} - \bar{\mu} & 2\bar{\tau} & \bar{\sigma} \\ 2\bar{\alpha} - \bar{\pi} - \tilde{\nu} & 2(\bar{\rho} - \bar{\mu}) & \bar{\tau} - 2\bar{\beta} + \bar{\kappa} \\ -\tilde{\lambda} & -2\bar{\pi} & \bar{\rho} - 2\bar{\epsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ -\phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren wir dieses System von links mit der konstanten Matrix $\text{diag}(1, 1/\sqrt{2}, 1)$ und von rechts mit $\text{diag}(1, 1/\sqrt{2}, 1)$ und $\text{diag}(1, \sqrt{2}, 1)$, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} n^j & \frac{1}{\sqrt{2}}m^j & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{m}^j & \frac{1}{2}(l^j + n^j) & \frac{1}{\sqrt{2}}m^j \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{m}^j & l^j \end{pmatrix} \partial_j \begin{pmatrix} \phi_0 \\ -\sqrt{2}\phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = Z^{(s=1)} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ -\sqrt{2}\phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

wobei

$$Z^{(s=1)} = \begin{pmatrix} 2\tilde{\gamma} - \tilde{\mu} & \sqrt{2}\tilde{\tau} & \tilde{\sigma} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(2\tilde{\alpha} - \tilde{\pi} - \tilde{\nu}) & \tilde{\rho} - \tilde{\mu} & \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\tau} - 2\tilde{\beta} + \tilde{\kappa}) \\ -\tilde{\lambda} & -\sqrt{2}\tilde{\pi} & \tilde{\rho} - 2\tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Mit den Hermiteschen Matrizen

$$M_{(1)}^j = \begin{pmatrix} n^j & \frac{1}{\sqrt{2}}m^j & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{m}^j & \frac{1}{2}(l^j + n^j) & \frac{1}{\sqrt{2}}m^j \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{m}^j & l^j \end{pmatrix} \quad (j = 0, 1, 2, 3) \quad (2.48)$$

und dem Differentialoperator

$$B^{(s=1)} = -M_{(1)}^v \partial_v \quad (v = 1, 2, 3) \quad (2.49)$$

ist dieses System wiederum äquivalent zu

$$M_{(1)}^0 \partial_0 \begin{pmatrix} \phi_0 \\ -\sqrt{2}\phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = (B^{(s=1)} + Z^{(s=1)}) \begin{pmatrix} \phi_0 \\ -\sqrt{2}\phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Bemerkung 2.31. Sei $(\phi, \psi)_1 = \int_{U_t} \phi^* \psi \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ das Skalarprodukt des Prähilbertraums $C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^3)$. Bezeichne weiter $(\phi_0, \phi_1, \phi_2) := \phi$ die drei Komponenten von $\phi \in C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^3)$. Da in dem lokalen Minkowski-System für den Feldstärketensor

$$\begin{aligned} \phi_0 &= B_y - E_x + i(E_y + B_x), \\ \phi_1 &= E_z - iB_z, \\ \phi_2 &= E_x + B_y + i(E_y - B_x) \end{aligned}$$

gilt, vgl. [51, p. 167], folgt

$$\phi^* \phi = (\bar{\phi}_0, -\sqrt{2}\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2) \begin{pmatrix} \phi_0 \\ -\sqrt{2}\phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = 2\bar{\phi}_1\phi_1 + \bar{\phi}_0\phi_0 + \bar{\phi}_2\phi_2 = 2(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2).$$

Damit entspricht also das Hermitesche Skalarprodukt bezüglich des komplexen 3-Vektors $(\phi_0, -\sqrt{2}\phi_1, \phi_2)^t$ demjenigen des (\mathbf{E}, \mathbf{B}) -Feldes der Standardnotation im gravitationsfreien Fall mit $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^6)$, $\Omega = U_t \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt, vgl. [15, pp. 339].

Lemma 2.32. Sei $(\mathcal{U}, \varphi, U)$ eine lokale Koordinatenumgebung, und es gelte $g^{00} > 0$ auf ganz \mathcal{U} . Dann hat die Matrix $M_{(1)}^0$ die positiven Eigenwerte

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(l^0 + n^0), \quad \lambda_{2/3} = \frac{1}{2} \left(l^0 + n^0 \pm \sqrt{(l^0 + n^0)^2 - 2g^{00}} \right). \quad (2.51)$$

Beweis. Mit (2.48) gilt $2 \det(\lambda I - M_{(1)}^0) = ((\lambda - n^0)(\lambda - l^0) - m^0 \bar{m}^0)(2\lambda - (l^0 + n^0))$. Der zweite Faktor verschwindet für $\lambda = \lambda_1$; der erste lautet ausmultipliziert $\lambda^2 - (l^0 + n^0)\lambda + l^0 n^0 - m^0 \bar{m}^0 = \lambda^2 - (l^0 + n^0)\lambda + \frac{1}{2}g^{00} = (\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$. \square

Bemerkung 2.33. Mit $\det M_{(1)}^0 = \frac{1}{2}(l^0 + n^0)(l^0 n^0 - m^0 \bar{m}^0) = \frac{1}{4}(l^0 + n^0)g^{00}$ und dem Doppelten der Adjunkte von $M_{(1)}^0$,

$$\tilde{M}^0 = \begin{pmatrix} l^0(l^0 + n^0) - m^0 \bar{m}^0 & -\sqrt{2} l^0 m^0 & (m^0)^2 \\ -\sqrt{2} l^0 \bar{m}^0 & 2 l^0 n^0 & -\sqrt{2} n^0 m^0 \\ (\bar{m}^0)^2 & -\sqrt{2} n^0 \bar{m}^0 & n^0(l^0 + n^0) - m^0 \bar{m}^0 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

sieht man, daß

$$(M_{(1)}^0)^{-1} = \frac{2}{(l^0 + n^0)g^{00}} \tilde{M}^0 \quad (2.53)$$

gilt. Da ferner die Eigenwerte von $(M_{(1)}^0)^{-1}$ die Kehrwerte derjenigen von $M_{(1)}^0$ sind,¹ sind sie allesamt positiv. Insbesondere gilt für den größten Eigenwert von $(M_{(1)}^0)^{-1}$

$$\lambda_{\max} = \frac{2}{l^0 + n^0 - \sqrt{(l^0 + n^0)^2 - 2g^{00}}}. \quad (2.54)$$

Ferner folgt wegen $(l^0 + n^0)^2 - 2g^{00} \leq (l^0 + n^0 - g^{00}/(l^0 + n^0))^2$

$$\lambda_{\max} \leq 2 \frac{l^0 + n^0}{g^{00}} \quad (2.55)$$

Definition 2.34. Sei

$$L^{(1)} = c(M_{(1)}^0)^{-1} (B^{(s=1)} + Z^{(s=1)}) \quad (2.56)$$

der *Maxwell-Operator*.

Damit folgt aus den Maxwell-Gleichungen für eine Koordinatenumgebung \mathcal{U} mit $g^{00} > 0$ $\forall x \in \mathcal{U}$ via (2.50) die Evolutionsgleichung

$$\partial_t \begin{pmatrix} \phi_0 \\ -\sqrt{2}\phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = L^{(1)} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ -\sqrt{2}\phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Definition 2.35. Sei $H^{(1)} = (h_{ij})_{i,j}$ die Hermitesche (3×3) -Matrix mit den Einträgen

$$h_{11} = 2 \operatorname{Re} \tilde{\gamma} - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0(\sqrt{g} n^0) + \frac{l^0}{n^0} n^\nu \partial_\nu \left(\frac{n^0}{l^0} \right),$$

$$h_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\beta} + \tilde{\alpha} + \tilde{\tau} - \tilde{\nu} - \frac{n^0}{l^0} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0(\sqrt{g} m^0) + \frac{l^0}{n^0} m^\nu \partial_\nu \left(\frac{n^0}{l^0} \right) \right),$$

$$h_{13} = \tilde{\sigma} - \tilde{\lambda},$$

$$h_{22} = \operatorname{Re}(\tilde{\varepsilon} - \tilde{\gamma}) - \frac{1}{2\sqrt{g}} \partial_0(\sqrt{g}(l^0 + n^0)) + \frac{l^0}{2n^0} n^\nu \partial_\nu \left(\frac{n^0}{l^0} \right),$$

$$h_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\kappa} - \tilde{\pi} - \tilde{\beta} - \tilde{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0(\sqrt{g} m^0) \right),$$

$$h_{33} = 2 \operatorname{Re} \tilde{\varepsilon} - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0(\sqrt{g} l^0).$$

¹ Sei S eine unitäre Matrix, so daß $SM_{(1)}^0 S^*$ Diagonalgestalt hat; dann gilt $(SM_{(1)}^0 S^*)^{-1} = S(M_{(1)}^0)^{-1} S^*$.

Satz 2.36. Sei \mathcal{U} eine Koordinatenumgebung mit $g^{00} > 0$. Dann genügt der Maxwell-Operator $L^{(1)}$ für $\phi \in C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^3)$ der Beziehung

$$2 \operatorname{Re} (\phi, L^{(1)} \phi)_{(s=1)} = c (\phi, DH^{(1)} \phi)_{(s=1)} \quad (2.58)$$

wobei D eine diagonale (3×3) -Matrix mit Einträgen $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}$ ist, mit λ_i aus (2.51).

Beweis. Wir imitieren den Beweis von Satz 2.29 für (2×2) -Matrizen. Definieren wir zunächst für $q = 1, 2$ die beiden Differentialoperatoren $B_q^{(s=1)} := -\hat{M}_q^v \partial_v$ mit

$$\hat{M}_1^v = \begin{pmatrix} n^v & \frac{1}{\sqrt{2}} m^v & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{m}^v & \frac{1}{2} n^v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{M}_2^v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} l^v & \frac{1}{\sqrt{2}} m^v \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{m}^v & l^v \end{pmatrix}.$$

Entsprechend seien

$$Z_1^{(s=1)} = \begin{pmatrix} 2\tilde{\gamma} - \bar{\mu} & \sqrt{2}\tilde{\tau} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\alpha} - \bar{\pi} - \bar{\nu}) & -\bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2^{(s=1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{\sigma} \\ 0 & \bar{\rho} & \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\tau} - 2\bar{\beta} + \bar{\kappa}) \\ -\bar{\lambda} & -\sqrt{2}\bar{\pi} & \bar{\rho} - 2\bar{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Dann folgt mit (2.47) und (2.48)

$$B^{(s=1)} + Z^{(s=1)} = B_1^{(s=1)} + Z_1^{(s=1)} + B_2^{(s=1)} + Z_2^{(s=1)}.$$

Nun gilt für $\phi \in C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^3)$ entsprechend Lemma 2.10

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \left(\phi, \frac{n^0}{l^0} B_1^{(s=1)} \phi \right)_{(s=1)} &= -2 \operatorname{Re} \int_{U_t} \phi^* \frac{n^0}{l^0} \hat{M}_1^v \partial_v \phi \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \int_{U_t} \left(\frac{n^0}{l^0} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_v (\sqrt{g} \hat{M}_1^v) + \hat{M}_1^v \partial_v \left(\frac{n^0}{l^0} \right) \right) \phi^* \phi \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \left(\phi, \left[\frac{n^0}{l^0} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_v (\sqrt{g} \hat{M}_1^v) + \hat{M}_1^v \partial_v \left(\frac{n^0}{l^0} \right) \right] \phi \right)_{(s=1)} \end{aligned}$$

(beachte: $n^0, l^0 > 0$). Da nun für den Eintrag (1,1) der Matrix in den eckigen Klammern [...], der gleich ist dem Doppelten des Eintrags (2,2) von [...],

$$\begin{aligned} \frac{n^0}{l^0} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_v (\sqrt{g} n^v) + n^v \partial_v \left(\frac{n^0}{l^0} \right) &= \frac{n^0}{l^0} \nabla_j n^j - \frac{n^0}{l^0} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0 (\sqrt{g} n^0) + n^v \partial_v \left(\frac{n^0}{l^0} \right) \\ &= \frac{n^0}{l^0} \left(2 \operatorname{Re} (\bar{\mu} - \bar{\gamma}) - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0 (\sqrt{g} n^0) + \frac{l^0}{n^0} n^v \partial_v \left(\frac{n^0}{l^0} \right) \right) \end{aligned}$$

(die zweite Gleichung folgt mit Lemma 1.29) und entsprechend für das $\sqrt{2}$ -fache des Eintrags (1,2) der Matrix [...]

$$\begin{aligned} \frac{n^0}{l^0} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_v (\sqrt{g} m^v) + m^v \partial_v \left(\frac{n^0}{l^0} \right) &= \frac{n^0}{l^0} \nabla_j m^j - \frac{n^0}{l^0} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0 (\sqrt{g} m^0) + m^v \partial_v \left(\frac{n^0}{l^0} \right) \\ &= \frac{n^0}{l^0} \left(\bar{\beta} - \bar{\tau} - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0 (\sqrt{g} m^0) + \frac{l^0}{n^0} m^v \partial_v \left(\frac{n^0}{l^0} \right) \right) \end{aligned}$$

gilt, folgt sofort (vgl. auch Lemma 2.9)

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \left(\phi, (B_1^{(s=1)} + Z_1^{(s=1)}) \phi \right)_{(s=1)} &= 2 \operatorname{Re} \left(\phi, \frac{l^0 n^0}{n^0 l^0} B_1^{(s=1)} \phi \right)_{(s=1)} + \left(\phi, (Z_1^{(s=1)} + Z_1^{(s=1)*}) \phi \right)_{(s=1)} \\ &= (\phi, H_1 \phi)_{(s=1)} \end{aligned}$$

mit

$$H_1 = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 \\ \bar{h}_{12} & h'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h'_{22} = -\operatorname{Re} \tilde{\gamma} - \frac{1}{2\sqrt{g}} \partial_0(\sqrt{g} n^0) + \frac{l^0}{2n^0} n^\nu \partial_\nu \left(\frac{n^0}{l^0} \right).$$

Entsprechend gilt mit Lemma 2.10

$$2 \operatorname{Re} \left(\phi, B_2^{(s=1)} \phi \right)_{(s=1)} = \left(\phi, \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu (\sqrt{g} \hat{M}_2^\nu) \right] \phi \right)_{(s=1)},$$

und wegen Lemma 1.29

$$\frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} l^\nu) = \Delta_j l^j - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0 (\sqrt{g} l^0) = 2 \operatorname{Re} (\tilde{\varepsilon} - \tilde{\rho}) - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0 (\sqrt{g} l^0)$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} m^\nu) = \Delta_j m^j - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0 (\sqrt{g} m^0) = \tilde{\beta} + \tilde{\pi} - \tilde{\tau} - \tilde{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_0 (\sqrt{g} m^0)$$

folgt

$$2 \operatorname{Re} \left(\phi, (B_2^{(s=1)} + Z_2^{(s=1)}) \phi \right)_{(s=1)} = \left(\phi, H_2 \phi \right)_{(s=1)}$$

mit

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_{13} \\ 0 & h''_{22} & h_{23} \\ \bar{h}_{13} & \bar{h}_{23} & h_{33} \end{pmatrix}, \quad h''_{22} = -\operatorname{Re} \tilde{\varepsilon} - \frac{1}{2\sqrt{g}} \partial_0 (\sqrt{g} l^0).$$

Damit ist $2 \operatorname{Re} \left(\phi, (B^{(s=1)} + Z^{(s=1)}) \phi \right)_{(s=1)} = \left(\phi, (H_1 + H_2) \phi \right)_{(s=1)} = \left(\phi, H \phi \right)_{(s=1)}$. Die Behauptung folgt dann mit Lemma 2.7, vgl. Satz 2.25. \square

Kapitel 3

Anwendungen

3.1 Die Kerr-Newman-Raumzeit

Wir betrachten nun die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times (0, \infty) \times S$, versehen mit den Polarkoordinaten $(t, r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi)$, den *Boyer-Lindquist-Koordinaten*. Gegeben sei weiter die Nulltetraede (*Kinnersley-Tetraede*)

$$\left. \begin{aligned} l^j &= \frac{1}{\sqrt{2}\Delta} (r^2 + a^2, \Delta, 0, a), & l_j &= \frac{1}{\sqrt{2}\Delta} (\Delta, -\rho\bar{\rho}, 0, -a\Delta \sin^2 \theta), \\ n^j &= \frac{1}{\sqrt{2}\rho\bar{\rho}} (r^2 + a^2, -\Delta, 0, a), & n_j &= \frac{1}{\sqrt{2}\rho\bar{\rho}} (\Delta, \rho\bar{\rho}, 0, -a\Delta \sin^2 \theta), \\ m^j &= \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \left(ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right), & m_j &= \frac{1}{\sqrt{2}\rho} (ia \sin \theta, 0, -\rho\bar{\rho}, -i(r^2 + a^2) \sin \theta), \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

mit den Funktionen $\Delta: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho: (0, \infty) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$, $\Sigma: (0, \infty) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\left. \begin{aligned} \Delta(r) &:= r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, & \rho(r, \theta) &:= r + ia \cos \theta, \\ \Sigma(r, \theta) &:= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta = \rho\bar{\rho}(r^2 + a^2) + (2Mr - Q^2)a^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

und den Parametern $M, a, Q \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$, die der Bedingung

$$a^2 + Q^2 \leq M^2 \quad (3.3)$$

genügen. In der Tetraede (3.1) sind die Spinkoeffizienten (1.57)

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \bar{\kappa} = \bar{\sigma} = \bar{\nu} = \bar{\lambda} = 0, \\ \bar{\beta} &= \frac{\cot \theta}{2\sqrt{2}\rho}, & \bar{\rho} &= -\frac{1}{\sqrt{2}\bar{\rho}}, & \bar{\tau} &= -\frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2}\rho\bar{\rho}}, & \bar{\pi} &= \frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2}\bar{\rho}^2}, \\ \bar{\mu} &= -\frac{\Delta}{\sqrt{2}\rho\bar{\rho}^2}, & \bar{\alpha} &= \bar{\pi} - \bar{\beta}, & \bar{\gamma} &= \bar{\mu} + \frac{r - M}{\sqrt{2}\rho\bar{\rho}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

vgl. [29]. Mit (1.26) lauten die kovarianten Komponenten des metrischen Tensors

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho\bar{\rho}} & 0 & 0 & \frac{(2Mr - Q^2)a \sin^2 \theta}{\rho\bar{\rho}} \\ 0 & -\frac{\rho\bar{\rho}}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho\bar{\rho} & 0 \\ \frac{(2Mr - Q^2)a \sin^2 \theta}{\rho\bar{\rho}} & 0 & 0 & -\frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho\bar{\rho}} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

bzw.

$$ds^2 = \frac{\Delta \Sigma}{\rho \bar{\rho}} dt^2 - \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho \bar{\rho}} \left(d\varphi + \frac{(2Mr - Q^2)a}{\Sigma} dt \right)^2 - \frac{\rho \bar{\rho}}{\Delta} dr^2 - \rho \bar{\rho} d\theta^2.$$

Die Raumzeit (\mathcal{M}, g) heißt *Kerr-Newmansches Schwarzes Loch mit Drehimpuls aM und Ladung QM* . Die Raumzeit heißt für $a = Q = 0$ auch *Schwarzschild'sches Schwarzes Loch*, für $a = 0$ *Reissner-Nordströmsches Schwarzes Loch*, und für $Q = 0$ *Kerr'sches Schwarzes Loch*.

Die kontravarianten Komponenten des metrischen Tensors lauten

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma}{\rho \bar{\rho} \Delta} & 0 & 0 & \frac{(2Mr - Q^2)a}{\rho \bar{\rho} \Delta} \\ 0 & -\frac{\Delta}{\rho \bar{\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho \bar{\rho}} & 0 \\ \frac{(2Mr - Q^2)a}{\rho \bar{\rho} \Delta} & 0 & 0 & -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho \bar{\rho} \Delta \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

Seien

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \quad (3.6)$$

die Nullstellen von Δ . Mit (3.3) gilt $r_{\pm} \in [0, \infty)$. Das Urbild der Hyperfläche $(t, r \equiv r_+, \theta, \varphi) \subset \mathbb{R} \times (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ der Kartenabbildung $x \mapsto (t, r, \theta, \varphi)$ heißt *Ereignishorizont*. Sei ferner

$$U := \{\mathbb{R} \times (r_+, \infty) \times (0, \pi \times (0, 2\pi))\}$$

und sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ das Urbild von $U \subset \mathbb{R}^4$ der Karte $x \mapsto (t, r, \theta, \varphi)$. \mathcal{U} heißt *Außenraum* der Kerr-Newman-Raumzeit. Seien schließlich

$$r_e = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta},$$

$E := \{(t, r, \theta, \varphi) \mid r_+ < r < r_e\}$ und $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ das Urbild von E der Karte $x \mapsto (t, r, \theta, \varphi)$. \mathcal{E} heißt *Ergosphäre*, und das Urbild der Hyperfläche $(t, r \equiv r_e, \theta, \varphi)$ heißt *Ergohorizont*, vgl. [49]. Für $a = 0$ gilt $\mathcal{E} = \emptyset$, und für $a \neq 0$ ist $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{U}$, d.h. die Ergosphäre befindet sich im Außenraum. Da mit (3.2) $\rho \bar{\rho} - (2Mr - Q^2) \leq 0$ genau dann gilt, wenn $r \leq r_e$ ist, folgt

$$g_{00}(r, \theta) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad r \leq r_e, \quad (3.7)$$

d.h. g_{00} ist negativ in der Ergosphäre. Die Ergosphäre spielt eine wesentliche Rolle bei der Energiegewinnung durch den Penrose-Prozeß und bei dem *dragging of the inertial frames*, siehe Anhang A.3.

Lemma 3.1. *Sei \mathcal{U} der Außenraum der Kerr-Newman-Raumzeit. Dann gilt*

$$g^{00}(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

Beweis. Zunächst gilt

$$r > r_+ \geq M \geq 0, \quad (3.8)$$

also mit (3.2) $\rho \bar{\rho} > 0$, $\Delta > 0$ für $r > r_+$. Es gilt

$$\begin{aligned} \Sigma &= r^4(1 + \cos^2 \theta)r^2 a^2 + a^4 \cos^2 \theta + r^2 a^2 \sin^2 \theta + a^4 \sin^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta \\ &= \rho \bar{\rho}(r^2 + a^2) + (2Mr - Q^2)a^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

und damit

$$0 < \rho \bar{\rho} \Delta = \rho \bar{\rho}(r^2 + a^2) - (2Mr - Q^2)\rho \bar{\rho} \leq \rho \bar{\rho}(r^2 + a^2) + (2Mr - Q^2)a^2 \sin^2 \theta = \Sigma,$$

also ist $g^{00} = \Sigma / (\rho \bar{\rho} \Delta) \geq 1$. □

Bemerkungen. Mit Hilfe der Komponenten des Riemann-Tensors der Metrik (3.5) [11, Gl.(142), pp. 291], erkennt man, daß die Krümmung am Ereignishorizont, d.h. bei $r = r_+$, endlich bleibt, es sich also um eine Koordinatensingularität handelt, die durch geeignete Koordinaten wegtransformiert werden kann.

Eine wesentliche Eigenschaft des Ereignishorizonts $r = r_+$ ist, daß es keine kausale zukunftsgerichtete Kurve gibt, die von einem Ereignis (t, r, θ, φ) mit $r \leq r_+$ zu einem Weltpunkt im Außenraum $r > r_+$ führt. d.h. ein Ereignis, welches nicht im Außenraum stattfindet, ist dort unbeobachtbar. Ein Beobachter im Unendlichen, wie z.B. ein irdischer Astronom, sieht also ein Schwarzes Loch mit Radius r_+ ; das Innere dieses Lochs ist für ihn, solange er im Außenraum bleibt, physikalisch unerfahrbar. Siehe [26] und, speziell im Zusammenhang mit der Schwarzschild-Lösung, [42].

Wäre die Einschränkung (3.3) an die drei Parameter M , a und Q nicht erfüllt, so gäbe es keine reelle Nullstelle von Δ und damit keinen Ereignishorizont. Da aber für $M > 0$ immer eine Krümmungssingularität im Falle $\rho\bar{\rho} \rightarrow 0$, d.h. $r \rightarrow 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, vorliegt, würde dies bedeuten, daß sie von keinem Ereignishorizont umhüllt würde, sie läge frei im Außenraum. Sie wäre eine *nackte Singularität*. Nackte Singularitäten ermöglichen u.U. jedoch geschlossene zeitartige Kurven, d.h. Zeitmaschinen. Da aber die Einschränkung (3.3) keine mathematische Begründung hat, wurde zur Rettung des Kausalitätsprinzips die »Hypothese der kosmischen Zensur« (*cosmic censorship hypothesis*) eingeführt: Physikalisch vernünftige Bedingungen führen niemals zu einer nackten Singularität. In (3.3) offenbart sich also gewissermaßen der kosmische Zensor. Vgl. z.B. [11, pp. 377].

Korollar 3.2. Für den Dirac-Operator A und den Weyl-Operator $L^{(\frac{1}{2})}$ in der Kerr-Newman-Raumzeit gilt für $\psi \in C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^4)$ bzw. $\phi \in C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^2)$

$$\operatorname{Re}(\psi, A\psi) = 0, \quad \operatorname{Re}\left(\phi, L^{(\frac{1}{2})}\phi\right)_{\frac{1}{2}} = 0.$$

Beweis. Es gilt $\partial_0 l^0 = \partial_0 n^0 = \partial_0 m_0 = 0$, d.h. mit Satz 2.26 und 2.29 gilt jeweils $H = 0$. \square

Korollar 3.3. Für den Maxwell-Operator $L^{(s=1)}$ in der Kerr-Newman-Raumzeit gilt für $\phi \in C_0^\infty(U_t, \mathbb{C}^3)$

$$\frac{1}{2}(\phi, \lambda_{\max}\mu_- \phi)_{s=1} \leq \operatorname{Re}(\phi, L^{(s=1)}\phi)_{s=1} \leq \frac{1}{2}(\phi, \lambda_{\max}\mu_+ \phi)_{s=1} \quad (3.9)$$

mit

$$\mu_{\pm} = -\operatorname{Re}\tilde{\gamma} \pm \sqrt{(\operatorname{Re}\tilde{\gamma})^2 + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho\bar{\rho}} \left(1 + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\rho\bar{\rho}}\right)}, \quad (3.10)$$

$$\operatorname{Re}\tilde{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}\rho\bar{\rho}} \left(r - M - \frac{r\Delta}{\rho\bar{\rho}}\right) \quad (3.11)$$

und

$$\lambda_{\max} = \frac{2\sqrt{2}\Delta}{(r^2 + a^2) \left(1 + \frac{\Delta}{\rho\bar{\rho}} - \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta}{\rho\bar{\rho}}\right)^2 + 4 \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho\bar{\rho}} \frac{\Delta^2}{(r^2 + a^2)^2}}\right)} \quad (3.12)$$

Beweis. Zunächst berechnen wir die Einträge der Matrix $H^{(1)}$ aus Definition 2.35. Da einerseits

$$2 \operatorname{Re}\tilde{\gamma} = -\frac{\Delta}{\rho\bar{\rho}} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{1}{\rho}\right) + \sqrt{2} \frac{r - M}{\rho\bar{\rho}} = \frac{\sqrt{2}}{\rho\bar{\rho}} \left(r - M - \frac{r\Delta}{\rho\bar{\rho}}\right)$$

gilt, und mit (3.2) $\partial_r \rho\bar{\rho} = 2r$, $\partial_r \Delta = 2(r - M)$, also

$$\frac{l^0}{n^0} n^\nu \partial_\nu \left(\frac{n^0}{l^0}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_r \left(\frac{\Delta}{\rho\bar{\rho}}\right) = -\sqrt{2} \frac{(r - M)\rho\bar{\rho} - r\Delta}{\rho^2 \bar{\rho}^2} = -\frac{\sqrt{2}}{\rho\bar{\rho}} \left(r - M - \frac{r\Delta}{\rho^2 \bar{\rho}^2}\right)$$

folgt, ist

$$h_{11} = 0$$

und

$$h_{22} = -2 \operatorname{Re} \tilde{\gamma} = -\frac{\sqrt{2}}{\rho \bar{\rho}} \left(r - M - \frac{r \Delta}{\rho^2 \bar{\rho}^2} \right).$$

Man sieht sofort

$$h_{13} = h_{33} = 0.$$

Ferner ist $m^\nu \partial_\nu (n^0 / l^0) = 0$, d.h. $h_{12} = (\bar{\pi} + \tilde{\tau}) / \sqrt{2}$, also

$$h_{12} = \frac{ia \sin \theta}{2 \rho} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{a^2 \sin \theta \cos \theta}{2 \rho^2 \bar{\rho}},$$

und ebenso $h_{23} = -\sqrt{2} \bar{\pi}$, also

$$h_{23} = -\frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}^2}.$$

Damit ist

$$H^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & h_{12} & 0 \\ \bar{h}_{12} & h_{22} & h_{23} \\ 0 & \bar{h}_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

und man sieht sofort, daß wegen $\det(\lambda I_3 - H^{(1)}) = \lambda(\lambda^2 - h_{22}\lambda - (h_{12}\bar{h}_{12} + h_{23}\bar{h}_{23}))$ die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \mu_+$ und $\lambda_3 = \mu_-$ lauten. Ferner ist

$$\begin{aligned} l^0 + n^0 - \sqrt{(l^0 + n^0)^2 + 4m^0 \bar{m}^0} \\ = \frac{r^2 + a^2}{\sqrt{2} \Delta} \left(1 + \frac{\Delta}{\rho \bar{\rho}} - \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta}{\rho \bar{\rho}} \right)^2 + 4 \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho \bar{\rho}} \frac{\Delta^2}{(r^2 + a^2)^2}} \right), \end{aligned}$$

d.h. mit Bemerkung 2.33 ist λ_{\max} der größte Eigenwert von $(M_{(1)}^0)^{-1}$. Mit Satz 2.25 folgt die Behauptung. \square

Korollar 3.4. Für den Maxwell-Operator $L^{(s=1)}$ in der Kerr-Newman-Raumzeit gilt

$$-\frac{2}{r_+^2} \left(M - \frac{Q^2}{r_+} + |a| \right) (\phi, \phi)_{s=1} \leq \operatorname{Re} (\phi, L^{(s=1)} \phi)_{s=1} \leq 2 \frac{|a|}{r_+^2} (\phi, \phi)_{s=1}.$$

Beweis. Mit (3.11) ist

$$\operatorname{Re} \tilde{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2} \rho^2 \bar{\rho}^2} (r(\rho \bar{\rho} - \Delta) - M \rho \bar{\rho}). \quad (3.13)$$

Mit

$$\rho \bar{\rho} - \Delta = 2Mr - a^2 \sin^2 \theta - Q^2$$

gilt

$$r(\rho \bar{\rho} - \Delta) - M \rho \bar{\rho} = Mr^2 - Q^2 r - a^2 (r \sin^2 \theta + M \cos^2 \theta). \quad (3.14)$$

Aus $r > M$ (vgl. (3.8)) folgt

$$-a^2 r \leq -a^2 (r \sin^2 \theta + M \cos^2 \theta) \leq -aM,$$

Da wegen (3.3) $rM(r - M) = Mr^2 - M^2 r \leq Mr^2 - Q^2 r - a^2 r$ gilt und weiter $-a^2 M \leq 0$ ist, folgt damit aus (3.14)

$$rM(r - M) \leq r(\rho \bar{\rho} - \Delta) - M \rho \bar{\rho} \leq Mr^2 - Q^2 r.$$

Daher gilt mit (3.13)

$$\frac{rM(r-M)}{\sqrt{2}\rho^2\bar{\rho}^2} \leq \operatorname{Re}\tilde{\gamma} \leq \frac{Mr^2-Q^2r}{\sqrt{2}\rho^2\bar{\rho}^2} \quad (3.15)$$

(beachte: für $M > 0$ ist auch $\operatorname{Re}\tilde{\gamma} > 0$, für $M = 0$ gilt $\operatorname{Re}\tilde{\gamma} = 0$). Da nun

$$\operatorname{Re}\tilde{\gamma} \leq \sqrt{(\operatorname{Re}\tilde{\gamma})^2 + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \bar{\rho}^2} \left(1 + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\rho \bar{\rho}}\right)} \leq \operatorname{Re}\tilde{\gamma} + \frac{|a| \sin \theta}{\rho \bar{\rho}} \sqrt{1 + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\rho \bar{\rho}}} \quad (3.16)$$

und

$$1 + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\rho \bar{\rho}} = \frac{1}{\rho \bar{\rho}} (r^2 + 2a^2 \cos^2 \theta) < \frac{1}{\rho \bar{\rho}} (2r^2 + 2a^2 \cos^2 \theta) = 2 \quad (3.17)$$

gilt, folgt für μ_+ aus (3.10)

$$0 \leq \mu_+ \leq \sqrt{2} \frac{|a| \sin \theta}{\rho \bar{\rho}} \quad (3.18)$$

und für μ_- wegen $-2\operatorname{Re}\tilde{\gamma} - \sqrt{2}|a| \sin \theta / \rho \bar{\rho} \leq \mu_- \leq -2\operatorname{Re}\tilde{\gamma}$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\rho \bar{\rho}} \left(\frac{Mr^2 - Q^2 r}{\rho \bar{\rho}} + |a| \sin \theta \right) \leq \mu_- \leq -\sqrt{2} \frac{Mr^2 - Q^2 r}{\rho \bar{\rho}}. \quad (3.19)$$

Wegen $(r^2 + a^2)(\rho \bar{\rho} + \Delta) / \Sigma \leq 2(r^2 + a^2)\rho \bar{\rho} / \Sigma \leq 2$ ist $(l^0 + n^0) / g^{00} \leq \sqrt{2}$, d.h. mit (2.55)

$$\lambda_{\max} \leq 2\sqrt{2}.$$

Also folgt mit $\rho \bar{\rho} \geq r^2 > r_+^2$

$$\lambda_{\max} \mu_+ \leq 4 \frac{|a| \sin \theta}{\rho \bar{\rho}} \leq 4 \frac{|a|}{r_+}$$

$$\lambda_{\max} \mu_- \geq -\frac{4}{\rho \bar{\rho}} \left(\frac{Mr^2 - Q^2 r}{\rho \bar{\rho}} + |a| \sin \theta \right) \geq -\frac{4}{r_+^4} \left(M - \frac{Q^2}{r_+} + |a| \right).$$

Analog Satz 2.25 folgt die Behauptung. \square

Folgerung 3.5. Sei $a \neq 0$. Dann ist die obere Schranke für den Realteil des Maxwell-Operators echt positiv,

$$\frac{1}{2} (\phi, \lambda_{\max} \mu_- \phi)_{s=1} > 0 \quad \text{für } \phi \neq 0.$$

Beweis. Da die Ungleichungen (3.16) für $a \neq 0$ streng werden, sind sie es auch für (3.18), d.h. es gilt

$$0 < \mu_+ < \sqrt{2} \frac{|a| \sin \theta}{\rho \bar{\rho}}.$$

\square

Folgerung 3.6. Für den Maxwell-Operator der Schwarzschild- und der Reissner-Nordström-Raumzeit gilt

$$-\frac{2}{r_+^2} \left(M - \frac{Q^2}{r_+} \right) (\phi, \phi)_{s=1} \leq \operatorname{Re} (\phi, L^{(s=1)} \phi)_{s=1} \leq 0.$$

Beweis. Mit $a = 0$ gilt mit (3.10) $\mu_+ \equiv 0$ auf ganz \mathcal{U} . \square

3.2 Die Robertson-Walker-Kosmen

Sei $k \in \{-1, 0, 1\}$, und seien \mathcal{M}_k die drei Mannigfaltigkeiten

$$\mathcal{M}_k = \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \text{für } k = -1, 0, \\ \mathbb{R} \times S^3 & \text{für } k = 1. \end{cases} \quad (3.20)$$

Seien weiter

$$I_k = \begin{cases} (0, \infty) & \text{für } k = -1, 0, \\ (0, \pi) & \text{für } k = 1. \end{cases} \quad (3.21)$$

und damit $(\tau, \chi, \theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times I_k \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ Koordinaten von \mathcal{M}_k , wobei für $k = -1, 0$ $(\chi, \theta, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ die Polarkoordinaten des \mathbb{R}^3 (mit der radialen Koordinate χ) seien, und für $k = 1$ $(\chi, \theta, \varphi) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ die Polarkoordinaten der S^3 (d.h.: χ ist eine Winkelkoordinate). Ferner sei

$$a \in C^\infty(\mathbb{R}, (0, \infty)), \quad \tau \mapsto a(\tau), \quad (3.22)$$

eine Funktion in τ und $f_k: I_k \rightarrow (0, \infty)$ die Funktionen

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \sinh \chi & \text{für } k = -1, \\ \chi & \text{für } k = 0, \\ \sin \chi & \text{für } k = 1. \end{cases} \quad (3.23)$$

Wir schreiben im folgenden oft kurz f statt f_k . Damit sei durch

$$\begin{aligned} l^j &= \frac{1}{\sqrt{2}a(\tau)} (1, 1, 0, 0), & l_j &= \frac{a(\tau)}{\sqrt{2}} (1, -1, 0, 0), \\ n^j &= \frac{1}{\sqrt{2}a(\tau)} (1, -1, 0, 0), & n_j &= \frac{a(\tau)}{\sqrt{2}} (1, 1, 0, 0), \\ m^j &= \frac{1}{\sqrt{2}a(\tau)f_k(\chi)} \left(0, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right), & m_j &= \frac{a(\tau)f_k(\chi)}{\sqrt{2}} (0, 0, -1, -i \sin \theta) \end{aligned} \quad (3.24)$$

eine Nulltetrad gegeben. Dabei sind offensichtlich die Komponenten von l und n Funktionen von $\tau \in \mathbb{R}$, d.h. $l^j = l^j(\tau)$, $l_j = l_j(\tau)$, etc., und diejenigen von m Funktionen von τ und χ , $(\tau, \chi) \in \mathbb{R} \times I_k$, also $m^j = m^j(\tau, \chi)$ und $m_j = m_j(\tau, \chi)$. Die Spinkoeffizienten lauten

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} = \tilde{\sigma} = \tilde{\nu} = \tilde{\lambda} = \tilde{\pi} = \tilde{\tau} &= 0, \\ \tilde{\beta} &= \frac{\cot \theta}{2\sqrt{2}af}, & \tilde{\rho} &= -\frac{1}{\sqrt{2}a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{f'}{f} \right) & \tilde{\epsilon} &= \frac{\dot{a}}{2\sqrt{2}a^2}, \\ \tilde{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}a} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{f'}{f} \right), & \tilde{\alpha} &= -\tilde{\beta}, & \tilde{\gamma} &= -\tilde{\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Mit (1.26) lauten die ko- und kontravarianten Koeffizienten des metrischen Tensors also

$$\begin{aligned} (g_{ij}) &= a^2 \operatorname{diag}(1, -1, -f^2, -f^2 \sin^2 \theta), \\ (g^{ij}) &= \frac{1}{a^2} \operatorname{diag}\left(1, -1, -\frac{1}{f^2}, -\frac{1}{f^2 \sin^2 \theta}\right). \end{aligned}$$

Damit liest sich das Linienelement

$$ds^2 = a^2(\tau) (d\tau^2 - d\chi^2 - f^2(\chi) d\theta^2 - f^2(\chi) d\varphi^2) \quad (3.26)$$

und es gilt

$$\sqrt{g} = a^4(\tau) f^2(\chi). \quad (3.27)$$

Bemerkung 3.7. Sei

$$J_k = \begin{cases} (0, \infty) & \text{für } k = -1, 0, \\ (0, 1) & \text{für } k = 1, \end{cases} \quad (3.28)$$

und sei

$$\sigma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad \tau \mapsto \sigma(\tau) = \int_0^\tau a \, d\tau.$$

Da $\dot{\sigma}(\tau) = a(\tau) > 0 \, \forall \tau \in (0, \infty)$, ist σ ein Diffeomorphismus. Mit

$$\tilde{I}_k = I_k \quad \text{für } k = -1, 0, \quad \text{und} \quad \tilde{I}_1 = (0, \frac{\pi}{2})$$

sind die Funktionen $f_k: \tilde{I}_k \rightarrow J_k$ ebenfalls Diffeomorphismen. Mit dem Koordinatenwechsel $(0, \infty) \times \tilde{I}_k \rightarrow (0, \infty) \times J_k$, $(\tau, \chi) \mapsto (t, r)$,

$$\tau \mapsto t = \sigma(\tau), \quad \chi \mapsto r = f_k(\chi), \quad (3.29)$$

d.h. mit

$$t = \sigma^{-1}(r), \quad \chi = f_k^{-1}(r) = \begin{cases} \operatorname{arsinh} r & \text{für } k = -1, \\ r & \text{für } k = 0, \\ \arcsin r & \text{für } k = 1, \end{cases} \quad (3.30)$$

und mit dem *Weltradius*

$$R(t) := a(\sigma^{-1}(t)) / c, \quad (3.31)$$

c die Lichtgeschwindigkeit, gilt

$$d\tau = \frac{c \, dt}{R(t)}, \quad \text{bzw.} \quad c \, dt = a(\tau) \, d\tau, \quad d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (3.32)$$

Damit lautet die Metrik

$$ds^2 = c^2 \, dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 \, d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\varphi^2 \right). \quad (3.33)$$

Dies ist das bekannte *Robertson-Walker-Linienelement*, die Metrik einer Raumzeit, die man aus dem *kosmologischen Prinzip* der raumartigen Isotropie erhält; vgl. [49] oder [26].

Führen wir nach (3.29) nur die Koordinatentransformation $\tau \mapsto t$ durch, so lautet das Linienelement (3.26) mit (3.31) für $k = 1$

$$ds^2 = c^2 \, dt^2 - R^2(t) (d\chi^2 + \sin^2 \chi \, d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta \, d\varphi^2).$$

Der räumliche Anteil $R^2(t) (d\chi^2 + \sin^2 \chi \, d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta \, d\varphi^2)$ ist also genau das dreidimensionale Linienelement einer in den Euklidischen \mathbb{R}^4 eingebetteten Hyperkugel mit Radius R , womit sich der Name »Weltradius« für R erklärt; vgl. [49, pp. 149].

Die Koordinaten $(\tau, \chi, \theta, \varphi)$ heißen auch *chronometrische Koordinaten des mitbewegten Bezugssystems*, vgl. [58] oder [32].

Bemerkung 3.8. Ein physikalisches Modell des Weltalls ergibt sich, wenn man mit (3.33) in die Einsteinschen Feldgleichungen mit dem Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit (»Galaxiengas«) eingeht. Dies liefert letztendlich eine gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichung für $R(t)$, die *Friedmann-Gleichung* [49, pp. 156]. Ist $R(t)$ Lösung dieser Gleichung, so heißt die zugehörige Robertson-Walker-Raumzeit *Friedmann-Kosmos*.

Für den speziellen Fall einer verschwindenden kosmologischen Konstante (»Vakuumenergiedichte«) reduziert sich die Friedmann-Gleichung für ein materiedominiertes Universum

(»inkohärente« oder »staubförmige Materie«) auf die einfache Gleichung $(dR/dt)^2 = \mathcal{A}/R - k$, $\mathcal{A} = \text{const}$, die mit der Transformation $t \mapsto \tau$, $R(t) \mapsto a(\tau)$ die Form

$$(\dot{a})^2 = A_0 a - k a^2$$

mit $A_0 = \mathcal{A}/c^2$ annimmt, [51, p. 237]. Durch Trennung der Variablen erhält man leicht die Lösungen

$$a(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} A_0 (\cosh \tau - 1) & \text{für } k = -1, \\ \frac{1}{4} A_0 \tau^2 & \text{für } k = 0, \\ \frac{1}{2} A_0 (1 - \cos \tau) & \text{für } k = 1 \end{cases} \quad (3.34)$$

mit $\tau \in I_k$. Mit (3.29) gilt dann $t = \frac{1}{c} \int a d\tau$, d.h. $t \in J_k$,

$$t = \begin{cases} \frac{1}{2c} A_0 (\sinh \tau - 1) & \text{für } k = -1, \\ \frac{1}{12c} A_0 \tau^3 & \text{für } k = 0, \\ \frac{1}{2c} A_0 (1 - \sin \tau) & \text{für } k = 1. \end{cases}$$

Auch für ein strahlungsdominiertes Friedmann-Universum kann man für $\Lambda = 0$ elementare Lösungen erhalten, vgl. [51, §26], [49, §5, speziell pp. 156 und pp. 160], [42, pp. 347] oder [32, §§111–113].

Bemerkung 3.9. Mit (3.26) ist

$$g^{00}(x) = \frac{1}{a^2(\tau)} > 0 \quad \forall x \in \mathcal{M}_k. \quad (3.35)$$

Mit (3.24) folgt

$$l^0 + n^0 = \frac{\sqrt{2}}{a}, \quad l^0 - n^0 = m^0 = 0. \quad (3.36)$$

Also ist $(l^0 + n^0)^2 - 2g^{00} = 0$, d.h.

$$\frac{1}{2} \left((l^0 + n^0 \pm \sqrt{(l^0 + n^0)^2 - 2g^{00}}) \right) = \frac{1}{2} (l^0 + n^0) = \frac{1}{\sqrt{2}a}. \quad (3.37)$$

Satz 3.10. Für den Dirac-Operator A der Robertson-Walker-Kosmen mit $\dot{a} \geq 0$ gilt

$$-\frac{3\dot{a}}{2a} (\phi, \phi) \leq \text{Re}(\phi, A\phi) \leq 0. \quad (3.38)$$

Beweis. Mit Satz 2.26, (3.36) und (3.27) gilt

$$h_1 = -\frac{1}{a^4 f^2} \partial_\tau (a^3 f^2) = -3 \frac{\dot{a}}{a^2}, \quad h_2 = h_3 = 0.$$

Mit Lemma 2.8 ist

$$\hat{\mu}_{\min} = -3 \frac{\dot{a}}{a^2}, \quad \hat{\mu}_{\max} = 0,$$

und (2.28) ergibt mit (3.37)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{a}.$$

Satz 2.25 liefert mit $\lambda_{\max} = \lambda_1 / g^{00} = a(\tau)$ die Behauptung. \square

Satz 3.11. Für den Weyl-Operator der Robertson-Walker-Kosmen mit $\dot{a} \geq 0$ gilt

$$-\frac{3\dot{a}}{2a} (\phi, \phi)_{(\frac{1}{2})} \leq \text{Re}(\phi, L^{(\frac{1}{2})} \phi)_{(\frac{1}{2})} \leq 0. \quad (3.39)$$

Beweis. Die Matrix aus Definition 2.28 hat mit (3.24) die Gestalt

$$H^{(\frac{1}{2})} = -\frac{3\dot{a}}{\sqrt{2}a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

während die Matrix (2.40) mit (3.24) und (3.35)

$$(M_{(\frac{1}{2})}^0)^{-1} = \frac{2}{g^{00}} \begin{pmatrix} n^0 & -\bar{m}^0 \\ -m^0 & l^0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

lautet, also

$$(M_{(\frac{1}{2})}^0)^{-1} H^{(\frac{1}{2})} = -\frac{3\dot{a}}{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Satz 2.29 folgt die Behauptung. \square

Satz 3.12. Für den Maxwell-Operator des Robertson-Walker-Kosmos mit $\dot{a} \geq 0$ gilt

$$-\sqrt{2} \frac{\dot{a}}{a} (\phi, \phi)_{(s=1)} \leq \operatorname{Re} (\phi, L^{(1)} \phi)_{(s=1)} \leq -\frac{\dot{a}}{2a} (\phi, \phi)_{(s=1)} \quad (3.40)$$

Beweis. Nach Definition 2.35 gilt mit (3.24), (3.25) und (3.27) wegen $n^\nu \partial_\nu = 0$

$$\begin{aligned} h_{11} &= -\frac{\dot{a}}{\sqrt{2}a^2} - \frac{1}{a^4 f^2} \partial_\tau \left(\frac{a^3 f^2}{\sqrt{2}} \right) = -2\sqrt{2} \frac{\dot{a}}{a^2}, \\ h_{22} &= \frac{\dot{a}}{\sqrt{2}a^2} - \frac{1}{\sqrt{2}a^4 f^2} \partial_\tau (a^3 f^2) = -\sqrt{2} \frac{\dot{a}}{a^2}, \\ h_{33} &= \frac{\dot{a}}{\sqrt{2}a^2} - \frac{1}{a^4 f^2} \partial_\tau \left(\frac{a^3 f^2}{\sqrt{2}} \right) = -\sqrt{2} \frac{\dot{a}}{a^2} = h_{22}, \\ h_{12} &= h_{23} = h_{13} = 0. \end{aligned}$$

Da ferner $(l^0 + n^0)g^{00} = \sqrt{2}/a^3$ gilt, ist mit (2.53)

$$(M_{(1)}^0)^{-1} H^{(1)} = \frac{a}{\sqrt{2}} I_3.$$

Daraus folgt $(M_{(1)}^0)^{-1} H^{(1)} = -\dot{a}/a \operatorname{diag}(\sqrt{2}, 1, 1)$, und mit Satz 2.36 folgt daher die Behauptung. \square

Bemerkung 3.13. Ist $\dot{a} < 0$, d.h. beschreibt die Robertson-Walker-Raumzeit ein *kontrahierendes* Weltall, so kehren sich alle Ungleichungen (3.38), (3.39) und (3.40) einfach um. Es sei schließlich erwähnt, daß in der Literatur die *Hubble-Konstante* H durch

$$H = c \frac{\dot{a}}{a^2} = \frac{1}{R(t)} \frac{dR}{dt}$$

definiert ist, s. z.B. [32, p. 445].

Anhang A

Anhang

A.1 Die Spinkoeffizienten (3.25) der Robertson-Walker-Raumzeit

Sei $e_{(a)}^j$, $a = 1, 2, 3, 4$, $j = 0, 1, 2, 3$, ein Vierbein einer Raumzeit (\mathcal{M}, g) . Sei weiter

$$\lambda_{(a)(b)(c)} := e_{(b)i,j} (e_{(a)}^i e_{(c)}^j - e_{(a)}^j e_{(c)}^i).$$

Dann gilt

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = -\lambda_{(c)(b)(a)}, \quad (\text{A.1})$$

und für die Ricci-Rotationskoeffizienten (1.57)

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2} (\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(b)(a)} - \lambda_{(b)(c)(a)}), \quad (\text{A.2})$$

[11] oder [32, §98] (beachte die unterschiedliche Anordnung der Indizes von λ und γ in [32]). Wir schreiben (A.2) um zu

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2} (\lambda_{(a)(b)(c)} - \lambda_{(b)(c)(a)} + \lambda_{(c)(a)(b)}), \quad (\text{A.3})$$

Sei nun

$$l^j = e_{(1)}^j, \quad n^j = e_{(2)}^j, \quad m^j = e_{(3)}^j, \quad \bar{m}^j = e_{(4)}^j$$

mit der Nulltetraede (3.24). Dann berechnet man

$$\lambda_{112} = l_{i,j} (l^i n^j - l^j n^i) = l_{i,\tau} (l^i n^\tau - l^\tau n^i) = -\frac{\dot{a}}{\sqrt{2}a^2},$$

und analog

$$\lambda_{122} = \frac{\dot{a}}{\sqrt{2}a^2}, \quad \lambda_{134} = \frac{1}{\sqrt{2}a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{f'}{f} \right), \quad \lambda_{234} = \frac{1}{\sqrt{2}a} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{f'}{f} \right), \quad \lambda_{334} = \frac{\cot\theta}{\sqrt{2}af},$$

$$\lambda_{113} = \lambda_{123} = \lambda_{132} = \lambda_{133} = \lambda_{213} = \lambda_{223} = \lambda_{233} = \lambda_{314} = \lambda_{324} = 0;$$

ferner ist wegen der Antisymmetrie (A.1) $\forall a, b = 1, \dots, 4$

$$\lambda_{aba} = 0.$$

Damit folgt mit (A.3)

$$\begin{aligned}
\gamma_{311} &= \frac{1}{2}(\lambda_{311} - \lambda_{113} + \lambda_{131}) = -\lambda_{133} = 0, \\
\gamma_{314} &= \frac{1}{2}(\lambda_{314} - \lambda_{143} + \lambda_{431}) = -\lambda_{143} = -\overline{\lambda_{134}} = -\frac{1}{\sqrt{2}a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{f'}{f} \right), \\
\gamma_{211} &= \frac{1}{2}(\lambda_{211} - \lambda_{112} + \lambda_{121}) = -\lambda_{112} = \frac{\dot{a}}{\sqrt{2}a^2}, \\
\gamma_{341} &= \frac{1}{2}(\lambda_{341} - \lambda_{413} + \lambda_{134}) = \frac{1}{2}(-\overline{\lambda_{134}} + \lambda_{314} + \lambda_{134}) = 0, \\
\gamma_{313} &= \frac{1}{2}(\lambda_{313} - \lambda_{133} + \lambda_{331}) = -\lambda_{133} = 0, \\
\gamma_{243} &= \frac{1}{2}(\lambda_{243} - \lambda_{432} + \lambda_{324}) = \frac{1}{2}(\overline{\lambda_{243}} + \lambda_{234}) = \frac{1}{\sqrt{2}a} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{f'}{f} \right), \\
\gamma_{212} &= \frac{1}{2}(\lambda_{212} - \lambda_{122} + \lambda_{221}) = -\lambda_{122} = -\frac{\dot{a}}{\sqrt{2}a^2}, \\
\gamma_{342} &= \frac{1}{2}(\lambda_{342} - \lambda_{423} + \lambda_{234}) = \frac{1}{2}(\overline{\lambda_{234}} + \lambda_{324} + \lambda_{234}) = 0, \\
\gamma_{244} &= \frac{1}{2}(\lambda_{244} - \lambda_{442} + \lambda_{424}) = \frac{1}{2}(\overline{\lambda_{233}} + \overline{\lambda_{233}}) = 0, \\
\gamma_{312} &= \frac{1}{2}(\lambda_{312} - \lambda_{123} + \lambda_{231}) = \frac{1}{2}(-\lambda_{213} - \lambda_{123} - \lambda_{132}) = 0, \\
\gamma_{214} &= \frac{1}{2}(\lambda_{214} - \lambda_{142} + \lambda_{421}) = \frac{1}{2}(\overline{\lambda_{213}} - \overline{\lambda_{132}} - \overline{\lambda_{123}}) = 0, \\
\gamma_{344} &= \frac{1}{2}(\lambda_{344} - \lambda_{443} + \lambda_{434}) = \frac{1}{2}(-\overline{\lambda_{334}} - \overline{\lambda_{334}}) = -\frac{\cot\theta}{\sqrt{2}af}, \\
\gamma_{242} &= \frac{1}{2}(\lambda_{242} - \lambda_{422} + \lambda_{224}) = \overline{\lambda_{223}} = 0, \\
\gamma_{241} &= \frac{1}{2}(\lambda_{241} - \lambda_{412} + \lambda_{124}) = \frac{1}{2}(-\overline{\lambda_{132}} + \overline{\lambda_{213}} + \overline{\lambda_{123}}) = 0, \\
\gamma_{213} &= \frac{1}{2}(\lambda_{213} - \lambda_{132} + \lambda_{321}) = -\frac{1}{2}\lambda_{123} = 0, \\
\gamma_{343} &= \frac{1}{2}(\lambda_{343} - \lambda_{433} + \lambda_{334}) = \lambda_{334} = \frac{\cot\theta}{\sqrt{2}af}.
\end{aligned}$$

Mit (1.57) folgt daher (3.25).

A.2 Thermodynamik Schwarzer Löcher und Superradianz

Es sei die Kerr-Newman-Raumzeit aus Kapitel 3 gegeben. Für einen Beobachter »im Unendlichen«, d.h. für $r \rightarrow \infty$, strebt die Kerr-Newman-Metrik asymptotisch gegen die Metrik des (flachen) Minkowski-Raums in Polarkoordinaten,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Daher ist Kerr-Newmans Schwarzes Loch eine asymptotisch flache Raumzeit, siehe z.B. [26].

Man sieht sofort, daß die Metrik (3.5) neben den Singularitäten $r = r_{\pm}$ (3.7) eine weitere für $\rho = 0$ aufweist, d.h. genau dann, wenn

$$\begin{cases} r = 0, & \text{für } a = 0, \\ r = 0, \ u = \frac{\pi}{2} & \text{für } a \neq 0. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Komponenten des Riemann-Tensors der Metrik (3.5) [11, Gl. (142) p. 291] erkennt man, daß die Krümmung für $r \rightarrow \infty$ gegen unendlich geht. Wie man mit asymptotisch cartesianischen Koordinaten erkennen kann, ist diese Singularität nicht punktförmig, sondern hat die Gestalt eines Ringes, der nur in der Schwarzschild-Metrik zu einem Punkt degeneriert [11, p. 306ff].

Da die Kerr-Newman-Raumzeit stationär und axialsymmetrisch ist, also ∂_t und ∂_φ Killingfelder sind, s. [10] und [31], ist ein Beobachter, der sich längs einer Weltlinie $r = \text{const}$,

$\theta = \text{const}$ mit uniformer Winkelgeschwindigkeit Ω bewegt, ein stationärer Beobachter. Seine Winkelgeschwindigkeit, die im Unendlichen gemessen wird, ist

$$\Omega = \Omega(r, \theta) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{\varphi}}{t}.$$

($\dot{}$ bezeichne die Ableitung nach einem Bewegungsparameter τ , z.B. der Eigenzeit des Beobachters). Das Vektorfeld eines stationären Beobachters ist proportional zu $\partial_t + \Omega\partial_\varphi$. Die Bedingung, daß dies Vektorfeld zeitartig ist, d. h.

$$g(\partial_t + \Omega\partial_\varphi, \partial_t + \Omega\partial_\varphi) = g_{tt} + 2\Omega g_{t\varphi} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi} > 0$$

impliziert

$$\Omega_{\min} < \Omega < \Omega_{\max}$$

mit

$$\Omega_{\min} = \bar{\Omega} - \sqrt{\bar{\Omega} - g_{tt}/g_{\varphi\varphi}}, \quad \Omega_{\max} = \bar{\Omega} + \sqrt{\bar{\Omega} - g_{tt}/g_{\varphi\varphi}},$$

wobei

$$\bar{\Omega} = \frac{(2Mr - Q^2)a}{\Sigma} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}.$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \geq 0$ (wende sonst die folgende Überlegung einfach auf Ω_{\max} statt auf Ω_{\min} an). Es gilt mit (3.7) im Außenraum $r > r_+$

$$\Omega_{\min} \geq 0 \Leftrightarrow g_{tt} \leq 0 \quad (g_{\varphi\varphi} < 0 \quad \forall r > 0) \Leftrightarrow r \geq r_e. \quad (\text{A.4})$$

Somit ist die Hyperfläche $r = r_e$ die Grenze, innerhalb der es keine (bezüglich einer Beobachterin im Unendlichen) statischen kausalen Teilchen mehr geben kann. Ein kausales Teilchen in der Ergosphäre muß also um die Symmetrieachse $\theta = 0$ rotieren, es wird von der Rotation des Lochs gewissermaßen mitgezerrt. In der Literatur wird dieses Phänomen *dragging of the inertial frames* oder Thirring-Lense-Effekt genannt.

Es gilt $\Omega_{\min} = \Omega_{\max} = \bar{\Omega} \Leftrightarrow \bar{\Omega} = g_{tt}/g_{\varphi\varphi} \Leftrightarrow g_{tt}g_{\varphi\varphi} = g_{t\varphi}^2$; mit den Identitäten

$$\begin{aligned} \rho\bar{\rho} - 2Mr + Q^2 &= \Delta - a^2 \sin^2 \theta, \\ 2Mr - Q^2 &= r^2 + a^2 - \Delta, \end{aligned}$$

und multipliziert mit $\rho^2 \bar{\rho}^2 \sin^{-2} \theta$ ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} -(\Delta - a^2 \sin^2 \theta) \left((r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \right) &= a^2 \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta) \\ \Leftrightarrow 0 &= \Delta \left((r^2 + a^2)^2 - 2a^2 \sin^2 \theta (r^2 + a^2) + a^4 \sin^4 \theta \right) \\ &= \Delta (r^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta)^2 = \Delta \rho^2 \bar{\rho}^2; \end{aligned}$$

dies ist aber äquivalent zu $\Delta = 0$. Mit anderen Worten kann auf dem Ereignishorizont $r = r_+$ ein kausales Teilchen nur noch mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega_H := \frac{a(2Mr - Q^2)}{(r_+^2 + a^2)^2}$$

rotieren. Mit (3.7) folgt $r_+^2 = (M^2 + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2})^2 = 2Mr_+ - Q^2 - a^2$, d.h.

$$r_+^2 + a^2 = 2Mr_+ - Q^2.$$

Also gilt

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2}. \quad (\text{A.5})$$

Diese Konstante ist die im Unendlichen gemessene *Winkelgeschwindigkeit des Schwarzen Lochs*.

Bilden wir die auf den Hyperflächen $r = \text{const}$ induzierte Kerr-Newman-Metrik (3.5) mit $dr = 0$ und gehen auf den Horizont über, $r \rightarrow r_+$, so erreichen wir

$$ds^2|_{r=\text{const} \rightarrow r_+} = -\frac{\Sigma_+ \sin^2 \theta}{\rho_+ \bar{\rho}_+} \left(d\varphi + \frac{(2Mr_+ - Q^2) a}{\Sigma_+} dt \right)^2 - \rho_+ \bar{\rho}_+ d\theta^2$$

mit $\rho_+ = r_+ + ia \cos \theta$, $\Sigma_+ = (r_+^2 + a^2)^2$. Mit $\Sigma_+ = (2Mr_+ - Q^2)$ folgt

$$ds^2|_{r=\text{const} \rightarrow r_+} = -\frac{(2Mr_+ - Q^2)^2}{\rho_+ \bar{\rho}_+} \sin^2 \theta (d\varphi + \Omega_H dt)^2 - \rho_+ \bar{\rho}_+ d\theta^2.$$

Damit folgt für jeden Schnitt $dt = 0$, also $t = f(\theta, \varphi) = \text{const}$ für eine stetig partiell differenzierbare Funktion f mit der Periode 2π in φ , das Flächenelement

$$\eta_2 = |\rho_+| d\theta \wedge \frac{2Mr_+ - Q^2}{|\rho_+|} \sin \theta d\varphi = (2Mr_+ - Q^2) \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$$

(Anders ausgedrückt: $\eta_2 = \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}} d\theta \wedge d\varphi$). Das heißt für die Oberfläche des Schwarzen Lochs

$$A = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \eta_2 = (2Mr_+ - Q^2) \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = 4\pi (2Mr_+ - Q^2) = 4\pi (r_+^2 + a^2).$$

Da A unabhängig von dem Schnitt $dt = dr = 0$ ist und nur von den drei Parametern M , a und Q abhängt, ist die Oberfläche eine charakteristische Größe des Schwarzen Lochs [11, p. 317], [49, p. 274].

Hawkings Oberflächensatz. Unter den beiden Voraussetzungen:

- (i) die schwache Energiebedingung gilt, d. h. für die Energiedichte T_{00} ist in allen Bezugssystemen $T_{00} \geq 0$;
- (ii) es gibt keine nackten Singularitäten (*Kosmische Zensur*);

folgt, daß die Gesamtoberfläche eines Systems von endlich vielen schwarzen Löchern im Laufe der Zeit nicht kleiner werden kann.

Speziell für ein einzelnes schwarzes Loch gilt also, daß die Oberfläche eines schwarzen Lochs durch keinen Prozeß, der die schwache Energiebedingung erfüllt, verkleinert werden kann; es gilt also immer

$$\frac{dA}{dt} \geq 0.$$

Beweis. Ein Beweis ist in [26, p. 318]. □

A.2.1 Thermodynamik schwarzer Löcher

Mit Hawkings Oberflächensatz liegt es nahe, die Oberfläche eines schwarzen Lochs mit der Entropie in Beziehung zu setzen. In der Tat definierte Bekenstein [6] die Entropie eines schwarzen Lochs durch $S_{\text{bh}} = \frac{\ln 2}{8\pi} A$, oder in konventionellen Einheiten

$$S_{\text{bh}} = \frac{kc^3}{8\pi\hbar G} A \approx 1,46 \cdot 10^{48} \frac{\text{erg}}{\text{K cm}^2},$$

wobei k die Boltzmann-Konstante und G Newtons Gravitationskonstante ist. Analog der klassischen Thermodynamik lassen sich vier Hauptsätze der Thermodynamik schwarzer Löcher aufstellen [3, 25]:

Erster Hauptsatz.

$$dM = \Theta dA + \Omega_H dJ + \Phi dQ.$$

Hierbei ist $\Theta = \frac{\hbar\kappa}{2\pi kc} \approx 10^{-6}(M_\odot/M)$ K die Temperatur des schwarzen Lochs mit der Oberflächenschwerkraft (*surface gravity*)

$$\kappa = \frac{r_+ - M}{4(r_+^2 + a^2)},$$

(M_\odot : Masse der Sonne), und

$$\Phi = \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2}.$$

Siehe [25, Gl. (2)–(6)] für die Angabe der Größen in konventionellen Einheiten.

Zweiter (verallgemeinerter) Hauptsatz [25].

$$dS + \frac{1}{4} dA \geq 0,$$

wobei S die Entropie der Materie außerhalb der schwarzen Löcher ist, und A die Summe der Flächeninhalte aller Ereignishorizonte.

Nullter Hauptsatz. Die Temperatur $\Theta \sim \kappa$ ist konstant auf dem Horizont.

Dritter Hauptsatz. Es gilt immer $\kappa > 0$, und kein endlicher Prozeß kann die Temperatur auf $\Theta = \kappa = 0$ bringen.

Setzen wir nun im Fall einer Kerr-Newman-Raumzeit

$$M_{\text{irr}} := \sqrt{\frac{A}{16\pi}} = \frac{1}{2} \sqrt{r_+^2 + a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2Mr_+ - Q^2}.$$

Stellen wir diese Gleichung um, so erhalten wir¹

$$M^2 = \left(M_{\text{irr}} + \frac{Q^2}{4M_{\text{irr}}} \right)^2 + \frac{a^2 M^2}{4M_{\text{irr}}^2}.$$

Der Term $Q^2/4M_{\text{irr}}$ ist als elektromagnetische Selbstenergie auffaßbar, und $a^2 M^2/4M_{\text{irr}}^2$ als Rotationsenergie. Nach Hawkings Oberflächensatz gilt

$$dM_{\text{irr}} \geq 0,$$

weswegen M_{irr} *irreduzible Masse* des schwarzen Lochs heißt. Sie kann nicht abnehmen, wenn das schwarze Loch mit Strahlung oder Materie wechselwirkt. Für ein Schwarzschildes Loch mit $a = Q = 0$ ist $M_{\text{irr}} = M$. Die maximale Energie, die aus der Rotation eines ungeladenen schwarzen Lochs, d.h. bei $Q = 0 \neq a$, gewonnen werden kann, ist $\Delta M = M - M_{\text{irr}}$, also ($a^2 \leq M^2$)

$$\frac{\Delta M}{M} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - a^2/M^2}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,293.$$

¹ Es gilt $\left(M_{\text{irr}} + \frac{Q^2}{4M_{\text{irr}}} \right)^2 + \frac{a^2 M^2}{4M_{\text{irr}}^2} = \frac{(2M_{\text{irr}}^2 + Q^2)^2}{4M_{\text{irr}}^2} + \frac{a^2 M^2}{4M_{\text{irr}}^2} = \frac{M^2 r_+^2 + M^2 a^2}{4M_{\text{irr}}^2} = M^2 \frac{r_+^2 + a^2}{4M_{\text{irr}}^2} = M^2$.

A.2.2 Superradianz als Folge des Oberflächensatzes

Entsprechend dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik schwarzer Löcher gilt mit $Q = 0$, $r_+ - M = \frac{1}{2}\sqrt{M^2 - a^2}$ und $J = aM$

$$\Theta dA = \frac{8\pi}{M\sqrt{M^2 - a^2}} (2M^2 r_+ dM + J dJ).$$

Ein Strahlungsfeld $\psi = R(r)S(\theta)e^{i(\omega t + m\varphi)}$ hat im Koordinatensystem des asymptotischen Beobachters am Horizont die Energie $E = \text{Im}(\frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t}) = \omega \geq 0$ und den Drehimpuls $L = \text{Im}(\frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}) = m$, und mit $dM = E$ und $dJ = -L$ (minus, da dJ sich auf die Änderung des Drehimpulses des schwarzen Lochs bezieht, und nicht auf die des Feldes; vgl. [11, p. 524]) gilt

$$dJ = -\frac{m}{\omega} dM.$$

Aus dem Energiesatz folgt daher

$$\Theta dA = \frac{16\pi}{\sqrt{M^2 - a^2}} \left(1 + \frac{m}{\omega} \Omega_H\right) dM.$$

Mit dem Oberflächensatz $dA \geq 0$ schließen wir sofort

$$\omega < -m\Omega_H \iff dM < 0.$$

Unter der Voraussetzung $\omega < -m\Omega_H$ extrahiert ein monochromatisches Wellenfeld Energie aus dem schwarzen Loch, solange das Feld der schwachen Energiebedingung genügt.

A.3 Der Penrose-Prozeß

Eine wesentliche Eigenschaft der Kerr-Newman-Raumzeit in den Boyer-Lindquist-Koordinaten (t, r, θ, φ) ist, daß die Koordinaten t und φ zyklisch sind [2], daß also die kanonisch konjugierten Impulse p_t und p_φ erhalten bleiben. Sie werden *Energie* und *Drehimpuls* genannt (entsprechend den beiden Symmetrien der Raumzeit, Stationarität und Axialsymmetrie, s.o.). Innerhalb der Ergosphäre, $r < r_e$, vgl. (A.4), ist das Vektorfeld $\partial/\partial t$ raumartig:

$$g\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = g_{tt} < 0.$$

Man stelle sich nun folgendes Szenario vor: Ein (zeitartiges) Teilchen mit dem Viererimpuls $\mathbf{p} = (p_t, p_r, p_\theta, p_\varphi)$, $g(\mathbf{p}, \mathbf{p}) > 0$, spalte sich in der Ergosphäre in zwei Teilchen mit den Viererimpulsen $\mathbf{p}^{(1)}$ und $\mathbf{p}^{(2)}$. Da die Energie-Impuls-Erhaltung erfüllt sein muß, gilt allgemein

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)}.$$

Nun ist es aber durchaus möglich, daß für den Viererimpuls $\mathbf{p}^{(1)}$, der ein zeitartiges zukunftsgerichtetes Vektorfeld ist, das Skalarprodukt mit dem in der Ergosphäre raumartigen Vektorfeld $\partial/\partial t$ negativ ist, d. h.

$$\left(\mathbf{p}^{(1)}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{r < r_e} < 0.$$

Da andererseits gilt

$$\left(\mathbf{p}^{(1)}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = p_t^{(1)} = E^{(1)},$$

kann das abgespaltete Teilchen (1) also *negative* Energie haben. Mit der Eigenschaft

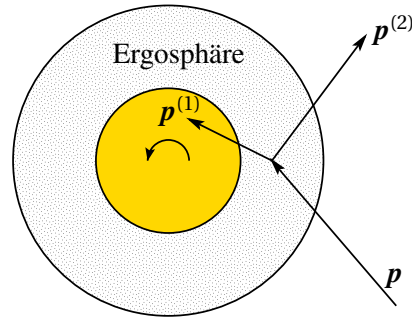


Abbildung A.1: Der Penrose-Prozeß.

$$0 < \left(\boldsymbol{p}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = \left(\boldsymbol{p}^{(1)}, \frac{\partial}{\partial t} \right) + \left(\boldsymbol{p}^{(2)}, \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

also $E = E^{(1)} + E^{(2)}$, folgt dann

$$E < E^{(2)}.$$

Mit einem derartigen Abspaltungsprozeß kann man also Energie aus dem Schwarzen Loch extrahieren. Notwendige Bedingung ist, daß die Ergosphäre überhaupt existiert, also $r_e > r_+$ gilt. Dies ist mit (3.2) und (A.4) äquivalent der Bedingung

$$a^2 \cos^2 \theta < a^2.$$

Insbesondere ist also $a \neq 0$: Das Schwarze Loch muß rotieren, damit der Penrose-Prozeß stattfinden kann. Misner, Thorne und Wheeler [37, pp. 907] zeigen für ein Teilchen mit Energie E , Drehimpuls L und Ladung e , daß für die minimale Energie, die das Teilchen haben muß, um den Ereignishorizont überqueren zu können,

$$E_{\min} = \frac{L_z a + e Q r_+}{r_+^2 + a^2}$$

gilt. Dies ist im Einklang mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik schwarzer Löcher. Für einen Außenraumbeobachter ist E_{\min} gleichzeitig der minimale Energieverlust. Da der maximale Energiegewinn $E_s = E^{(2)} - E$ gerade der minimale Verlust ist, das heißt $\Delta E = -E_{\min}$, folgt

$$E_s = \frac{L_z a + e Q r_+}{r_+^2 + a^2}.$$

Damit der Energiegewinn E positiv sein kann, $E > 0$, d. h. damit ein Teilchen negative Energie $-E$ haben kann, muß insbesondere die Bedingung $L_z a + e Q r < 0$ erfüllt sein; das Teilchen muß genügend großen, dem Schwarzen Loch entgegengesetzten Drehimpuls oder genügend große entgegengesetzte Ladung besitzen.

Mit anderen Worten: Mit einem (für einen Beobachter im Unendlichen) Energiegewinn der Größe $E > 0$ durch den Penrose-Prozeß verringert sich die Masse des Schwarzen Lochs um den Wert $dM = -E$; gleichzeitig nimmt der Drehimpuls des Lochs mit $dJ = -L_z$ und/oder die Ladung mit $dQ = -e$ ab (vgl. [37, pp. 904–907] und [11, pp. 373–375]).

A.4 Teukolskys Herleitung der Superradianz für die Kerr-Raumzeit ($Q = 0$)

Sei $s \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\}$. Dann heißt der hyperbolische Differentialoperator

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s := & \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{4aMr}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \varphi} + \left(\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ & - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ & - 2s \left(\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right) \frac{\partial}{\partial t} \\ & - 2s \left(\frac{a(r - M)}{\Delta} - \frac{ia \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + s^2 \cot^2 \theta - s \end{aligned}$$

Teukolsky-Operator mit Spin s . Teukolsky [55] gelang es zu zeigen, daß die Differentialgleichung $\mathcal{L}_s \psi = 0$ die Wellengleichung für ein quellenfreies Feld mit Spin s im Außenraum des Kerrschen Schwarzen Loches ($Q = 0$) darstellt, d.h. für $s = 0$ ein skalares Testfeld, für $s = \pm\frac{1}{2}$ ein Neutrino-Testfeld, für $s = \pm 1$ ein elektromagnetisches Testfeld, und für $s = \pm 2$ eine gravitative Störung der Metrik. Siehe auch [18].

Sei nun die Transformation der radialen Variablen $r_* : (r_+, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $r \mapsto r_*$,

$$r_*(r) := r + \frac{2Mr_+}{r_+ - r_-} \ln \left(\frac{r}{r_+ - 1} \right) - \frac{2Mr_-}{r_+ - r_-} \ln \left(\frac{r}{r_- - 1} \right)$$

gegeben. Es gilt

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta},$$

sowie

$$r_* \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2Mr_+}{r_+ - r_-} \ln(r - r_+).$$

Für die Schwarzschild-Raumzeit mit $a = 0$ folgt wegen $r_+ = 2M$ und $r_- = 0$ nach Grenzwertbetrachtung ($x \cdot \ln(1/x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$)

$$r_* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right).$$

Sei $K : (r_+, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion der radialen Variablen,

$$K = K_{\omega, m; a}(r) = (r^2 + a^2)\omega + am. \quad (\text{A.6})$$

Eine wichtige Eigenschaft der Kerr-Raumzeit besteht nun darin, daß die Spinwellengleichungen separierbar sind. Sei $s \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\}$. Dann wird ein quellenfreies Spin- s -Feld mit der Frequenz $\omega \in \mathbb{R}_+$ und dem Drehimpuls $m \in \mathbb{Z}$ in der Kerr-Raumzeit durch die Wellenfunktion

$$\psi(t, r, \theta, \varphi) = e^{i(\omega t + m\varphi)} R_s(r) S_s(\theta)$$

beschrieben. Dabei genügen die Funktionen $S_s : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ der gewöhnlichen Differentialgleichung (λ ist die Separationskonstante)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS_s}{d\theta} \right) \\ & + \left(\lambda - 2a\omega m - a^2 \omega^2 \sin^2 \theta + 2a\omega s \cos \theta - \frac{(m + s \cot \theta)^2}{\sin^2 \theta} - |s| \right) S_s = 0. \end{aligned}$$

Mit den Randbedingungen, daß S_s bei $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ regulär ist, und mit der Normierung $\int S \sin \theta d\theta = 1$ ist dies ein Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem, und die allgemeine Lösung läßt sich durch Eigenfunktionen $S_l^{(m, a\omega, s)}$ entwickeln, die Verallgemeinerungen der Kugelflächenfunktionen darstellen (*spheroidal spin-weighted functions*), vgl. [11] oder [55].

Für die Radialfunktionen $R_s : (r_+, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt mit den Bezeichnungen $P_{|s|} := \Delta^{|s|} R_{|s|}$ und $P_{-|s|} := R_{-|s|}$

$$T_s P_s = 0.$$

Hierbei ist der Operator T_s definiert durch

$$T_s = \frac{d^2}{dr_*^2} + g_s \frac{d}{dr_*} + f_s$$

mit

$$\begin{aligned} f_s &:= \frac{K^2 + 2i(r-M)K}{(r^2 + a^2)^2} - (4is\omega r - \lambda) \frac{\Delta}{(r^2 + a^2)^2} \\ &= \omega^2 + \frac{2am\omega}{r^2 + a^2} + \frac{a^2 m^2 - \lambda \Delta}{(r^2 + a^2)^2} \\ &\quad - \frac{2is}{(r^2 + a^2)^2} (2\omega r \Delta - \omega(r^2 + a^2)(r-M) - am(r-M)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g_s &:= 2 \frac{(1-|s|)r\Delta - |s|M(r^2 + a^2)}{(r^2 + a^2)^2} \\ &= \frac{2r}{r^2 + a^2} - \frac{2|s|(r-M)}{r^2 + a^2} - \frac{4Mr^2}{(r^2 + a^2)^2}. \end{aligned}$$

Die Funktionen P_s und S_s heißen *Teukolsky-Funktionen*.

Bemerkung. Der Operator T_s ist konjugiert komplex zu T_{-s} , dem Radialoperator für Wellen mit Spin $-s$, d. h. es gilt

$$T_{-s} P_{-s} = \bar{T}_s P_s = 0.$$

Allgemein läßt sich eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\psi'' + g(x) \psi' + f(x) \psi = h(x) \tag{A.7}$$

wobei $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ stetige komplexwertige Funktionen auf einem beschränkten oder unbeschränkten Intervall I sind und $g(x)$ stetig differenzierbar ist, durch die Transformation $\psi \mapsto u$, die durch

$$\psi = u \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi\right) \tag{A.8}$$

mit einem beliebigen $x_0 \in I$ gegeben ist, durch einfaches Einsetzen in (A.7) auf die Gestalt

$$u'' + \left(f(x) - \frac{g^2(x)}{4} - \frac{g'(x)}{2}\right) u = h(x) \exp\left(\frac{1}{2} \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi\right)$$

bringen (vgl. z. B. [23, p. 323]).

Lemma A.1. Gegeben sei der Operator

$$A_s := \frac{d^2}{dr_*^2} + q_s, \quad \text{wobei} \quad q_s = f_s - \frac{g_s^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{dg_s}{dr_*}.$$

Mit der Transformation

$$u_s := P_s \Delta^{-|s|/2} (r^2 + a^2)^{1/2}$$

ist dann die Teukolsky-Gleichung $T_s P_s = 0$ äquivalent zu $A_s u_s = 0$.

Beweis. Zunächst ist

$$\int g_s dr_* = \int g_s \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr = \int \frac{2r}{\Delta} dr - |s| \int \frac{2(r-M)}{\Delta} dr - 4M \int \frac{r^2 dr}{(r^2 + a^2)\Delta}.$$

Einerseits erreicht man durch Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{2r}{\Delta} dr = \frac{2}{r_+ - r_-} (r_+ \ln(r - r_+) - r_- \ln(r - r_-))$$

und

$$\int \frac{r^2 dr}{(r^2 + a^2)\Delta} = \frac{1}{4M} \left(\ln(r^2 + a^2) + \frac{2}{r_+ - r_-} (r_+ \ln(r - r_+) - r_- \ln(r - r_-)) \right),$$

andererseits sieht man sofort

$$\int \frac{2(r-M)}{\Delta} dr = \ln \Delta.$$

Damit folgt

$$\exp\left(\frac{1}{2} \int g_s dr_*\right) = \Delta^{|s|/2} (r^2 + a^2)^{1/2},$$

und mit (A.8) folgt daraus die Behauptung. \square

Bemerkung A.2. Die Funktion q_s verhält sich am Horizont, d. h. für $r_* \rightarrow -\infty$, und im Unendlichen, $r_* \rightarrow +\infty$, folgendermaßen:

$$q_s \xrightarrow{r_* \rightarrow -\infty} \left(\omega + \frac{am}{r_+^2 + a^2} - \frac{is(r_+ - M)}{r_+^2 + a^2} \right)^2 + o(r - r_+)$$

$$q_s \xrightarrow{r_* \rightarrow +\infty} \omega^2 - \frac{2is\omega}{r} + o(r^{-2})$$

Beweis. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} (r_+^2 + a^2)^2 &= (2Mr_+ - 2a^2)^2 = 4(M^2 r_+^2 - 2Mr_+ a^2 + a^4) \\ &= 4(M^2 r_+^2 - a^2(2Mr_+ - a^2)) = 4(M^2 - a^2)r_+^2; \end{aligned}$$

andererseits ist aber $(r_+ - M)^2 = M^2 - a^2$, d. h.

$$(r_+^2 - a^2)^2 = 4r_+^2 (r_+ - M)^2.$$

Daher gilt für g_s

$$g_s^2 \xrightarrow{r_* \rightarrow -\infty} \frac{4|s|^2 M^2 (r_+^2 - a^2)^2}{(r_+^2 + a^2)^4} + o(r - r_+) = \frac{4s^2 (r_+ - M)^2}{(r_+^2 + a^2)^2} + o(r - r_+).$$

Damit folgt sofort das asymptotische Verhalten von q_s am Horizont. \square

Satz A.3. Sei u_s Lösung von $A_s u_s = 0$, und seien

$$k := \omega + \frac{am}{r_+^2 + a^2} = \omega + m\Omega_H = \frac{K(r_+)}{r_+ + a^2}, \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma := \frac{s(r_+ - M)}{r_+^2 + a^2} = \frac{s\sqrt{M^2 - a^2}}{2Mr_+}. \quad (\text{A.10})$$

Dann gilt für das asymptotische Verhalten von u_s

$$\begin{aligned} u_s &\xrightarrow{r_* \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{\text{in}} r_*^s e^{-i\omega r_*} + \mathcal{A}_{\text{out}} r_*^{-s} e^{i\omega r_*} \\ u_s &\xrightarrow{r_* \rightarrow -\infty} \mathcal{B}_{\text{in}} e^{-ikr_* - \gamma r_*} + \mathcal{B}_{\text{out}} e^{ikr_* + \gamma r_*}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

mit den Amplituden $\mathcal{A}_{\text{in}}, \mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{B}_{\text{in}}, \mathcal{B}_{\text{out}} \in \mathbb{C}$. Wegen $r_+ - r_- = 2\sqrt{M^2 - a^2}$ folgt $\lim_{r_* \rightarrow -\infty} e^{\pm \gamma r_*} = \lim_{r \rightarrow r_+} e^{\pm s/2 \ln \Delta} = \Delta^{\pm s/2}$, also

$$u_s \xrightarrow{r_* \rightarrow -\infty} \mathcal{B}_{\text{in}} \Delta^{-s/2} e^{-ikr_*} + \mathcal{B}_{\text{out}} \Delta^{s/2} e^{ikr_*}.$$

Bemerkung A.4. Wegen

$$R_{|s|} = \Delta^{|s|} P_{|s|} = \Delta^{-|s|/2} (r^2 + a^2)^{-1/2} u_{|s|}, \quad R_{-|s|} = P_{-|s|} = \Delta^{|s|/2} (r^2 + a^2)^{-1/2} u_{-|s|}$$

gilt für alle $s \in \mathbb{Z}$

$$R_s = \Delta^{-s/2} (r^2 + a^2)^{-1/2} u_s.$$

Damit folgt für das asymptotische Verhalten von R_s

$$\begin{aligned} R_s &\xrightarrow{r_* \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{\text{in}} \frac{e^{-i\omega r_*}}{r} + \mathcal{A}_{\text{out}} \frac{e^{i\omega r_*}}{r^{2s+1}}, \\ R_s &\xrightarrow{r_* \rightarrow -\infty} \mathcal{B}_{\text{in}} \Delta^{-s} e^{-ikr_*} + \mathcal{B}_{\text{out}} e^{ikr_*}. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen am Horizont erfordern eine gesonderte Behandlung. Betrachten wir zu diesem Zweck den Wellen-Vierervektor $k_j = \text{Im}(\frac{1}{\psi} \partial_j \psi)$ einer Welle ψ in der Kerr-Raumzeit,

$$k_j = \left(\omega, \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \text{Im} \left(\frac{1}{u_s} \frac{du_s}{dr_*} \right), k_3, m \right).$$

Es folgt für die Komponenten $k_{(a)}$ bzgl. des Minkowski-Vierbeins (1.22) mit (A.6)

$$\begin{aligned} \Delta T^j k_j &= \frac{\Delta}{\sqrt{2}} (l^j + n^j) k_j \\ &= \frac{1}{2} \left((r^2 + a^2) \omega \pm (r^2 + a^2) k + am + \frac{\Delta}{\rho\bar{\rho}} \left((r^2 + a^2) \omega + am \right) \mp (r^2 + a^2) k \right) \\ &\xrightarrow{r_* \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} K(r_+) \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\Delta Z^j k_j = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} (l^j - n^j) k_j \xrightarrow{r_* \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} K(r_+) \pm (r^2 + a^2) k \right),$$

sowie $\Delta X^j k_j = \Delta Y^j k_j \rightarrow 0$. Damit gilt also am Horizont $r \rightarrow r_+$

$$k_{(a)} = (T^j k_j, X^j k_j, Y^j k_j, Z^j k_j) \xrightarrow{r \rightarrow r_+} \frac{1}{2\Delta} (K(r_+), 0, 0, K(r_+) \pm 2(r_+^2 + a^2) k).$$

Da dies eine lichtartige Welle darstellen soll, muß notwendig $\eta^{(a)(b)} k_{(a)} k_{(b)} = 0$ gelten, d.h.

$$|K(r_+)| = |K(r_+) \pm 2(r_+^2 + a^2) k|, \quad \text{also} \quad \pm (r_+^2 + a^2) k = -K(r_+).$$

Mit (A.9) kann daher nur das untere Vorzeichen gelten. Daher lautet die *allgemeine* Lösung der Radialgleichung am Horizont

$$u_s \xrightarrow{r_* \rightarrow -\infty} \mathcal{B}_{\text{in}} e^{-ikr_*}.$$

Vgl. dies mit der *Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung* im flachen Fall [50, p. 172].

Satz A.5. Für eine Welle in der Kerr-Raumzeit mit der Frequenz ω und dem Drehimpuls m gilt das Erhaltungsgesetz

$$|\mathcal{A}_{\text{out}}|^2 = |\mathcal{A}_{\text{in}}|^2 - \frac{k}{\omega} |\mathcal{B}_{\text{in}}|^2.$$

Beweis. Sei u_s Lösung der Gleichung $A_s u_s = 0$ mit dem asymptotischen Verhalten

$$\begin{aligned} u_s &\xrightarrow{r_* \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{\text{in}} r_*^s e^{-i\omega r_*} + \mathcal{A}_{\text{out}} r_*^{-s} e^{i\omega r_*} \\ u_s &\xrightarrow{r_* \rightarrow -\infty} \mathcal{B}_{\text{in}} e^{-ikr_*}. \end{aligned}$$

Sei ferner v_{-s} eine Lösung von $A_s v_{-s} = 0$ mit dem asymptotischen Verhalten

$$\begin{aligned} v_{-s} &\xrightarrow{r_* \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{\text{out}} r_*^{-s} e^{-i\omega r_*} + \mathcal{A}_{\text{in}} r_*^s e^{i\omega r_*} \\ v_{-s} &\xrightarrow{r_* \rightarrow -\infty} \mathcal{B}_{\text{in}} e^{-ikr_*}. \end{aligned}$$

Aus $A_{-s} v_{-s} = \bar{A}_s v_{-s}$ folgt $A_s \bar{v}_{-s} = 0$, d.h. \bar{v}_{-s} ist eine Welle mit Spin $+s$ (die allerdings wegen ihres Verhaltens am Horizont, $r_* \rightarrow -\infty$, natürlich *physikalisch* nicht realisiert ist, $\bar{\mathcal{B}}_{\text{in}}$ ist jetzt die Amplitude einer auslaufenden Welle!). Für die Wronski-Determinante der beiden Lösungen u_s und \bar{v}_{-s} gilt asymptotisch

$$\begin{aligned} [u_s, \bar{v}_{-s}] &\xrightarrow{r_* \rightarrow +\infty} i\omega(|\mathcal{A}_{\text{out}}|^2 - |\mathcal{A}_{\text{in}}|^2) \\ &\xrightarrow{r_* \rightarrow -\infty} -ik|\mathcal{B}_{\text{in}}|^2. \end{aligned}$$

Da die Wronski-Determinante für eine Gleichung der Form $u'' + qu$ jedoch konstant ist, folgt sofort die Behauptung. \square

Korollar. Für Wellen mit

$$0 < \omega < -m\Omega_H$$

gilt mit (A.9) $k < 0$, d.h. mit Satz A.5

$$|\mathcal{A}_{\text{out}}|^2 > |\mathcal{A}_{\text{in}}|^2.$$

A.5 Spin-Strukturen über Raumzeiten

Sei (\mathcal{M}, g) eine zusammenhängende Raumzeit, und sei $(E(\mathcal{M}, p, \mathcal{M}; O(1,3)))$ das Bündel der pseudoorthogonalen 4-Beine über (\mathcal{M}, g) . Dann gilt: (\mathcal{M}, g) ist genau dann raum- und zeitorientierbar, wenn E vier Zusammenhangskomponenten hat + und sich auf die Untergruppe $SO^+(1,3)$ reduzieren läßt; der Totalraum dieser Reduktion ist zusammenhängend, vgl. [4], auch bezüglich der Verallgemeinerung auf n -dimensionale pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Seien (\mathcal{M}, g) eine raum- und zeitorientierbare Raumzeit und $\Lambda : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^+(1,3)$ die zweifache Überlagerung (1.30). Sei weiter $f : Q \rightarrow E(\mathcal{M})$ eine differenzierbare Abbildung, und sei $(Q, q, \mathcal{M}; SL(2, \mathbb{C}))$ ein differenzierbares Prinzipalbündel. Das Paar (Q, f) heißt *Spin-Struktur* von (\mathcal{M}, g) , wenn (Q, f) eine Λ -Reduktion von $E(\mathcal{M})$ ist, d.h. wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Q \times SL(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\Psi} & Q \\ \downarrow f \times \Lambda & & \downarrow \searrow q \\ E(\mathcal{M}) \times SO^+(1,3) & \xrightarrow{\Phi} & E(\mathcal{M}) \xrightarrow{p} \mathcal{M} \end{array}$$

kommutiert, wobei Ψ und Φ die Rechtswirkung der Gruppen $SL(2, \mathbb{C})$ und $SO^+(1,3)$ auf den Totalräumen Q und $E(\mathcal{M})$ bezeichnen.

Man kann zeigen, daß alle raum- und zeitorientierbaren offenen Raumzeiten genau dann eine Spin-Struktur besitzen, wenn sie parallelisierbar sind [20]; insbesondere sind dies global hyperbolische Raumzeiten sowie eine Reihe bekannter kosmologischer Modelle [21]. Allgemein hat eine raum- und zeitorientierbare pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit genau dann eine Spin-Struktur, wenn ihre zweite Stiefel-Whitney-Klasse verschwindet [7]. Es ist zu bemerken, daß im Gegensatz zu dem Fall der geschlossenen Riemannschen Raumzeiten bei nichtorientierbaren pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten die Eigenschaft, eine Spin-Struktur zu besitzen, nicht ausschließlich durch die topologische Struktur der Mannigfaltigkeit bestimmt ist; sie kann von der Metrik abhängen [4, p. 78].

Sei schließlich $\text{Spin}(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ die Menge aller Isomorphieklassen von Spin-Strukturen von $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, wobei zwei Spin-Strukturen (Q, f) und (Q', f') isomorph sind, wenn ein Isomorphismus $F: Q \rightarrow Q'$ existiert, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{F} & Q' \\ f \searrow & & \downarrow f' \\ & & E(\mathcal{M}) \end{array}$$

kommutiert. Dann gilt

$$\text{Spin}(\mathcal{M}, \mathbf{g}) \cong H^1(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2),$$

s. [4, p. 94]. Insbesondere besitzt eine einfach zusammenhängende Raumzeit höchstens eine Spin-Struktur. Sie besitzt genau eine, wenn ihre zweite Stiefel-Whitney-Klasse verschwindet [4, p. 98].

Literaturverzeichnis

- [1] Abraham, Ralph, Marsden, Jarrold E., und Ratiu, Tudor (1983). *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading.
- [2] Arnold, Vladimir Igorevich (1978). *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. 2nd edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- [3] Bardeen, J. M., Carter, B. und Hawking, S. W. (1973). ‘The four laws of black hole dynamics’. *Communications in Mathematical Physics* **31**, 161–170.
- [4] Baum, Helga (1981). *Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren über pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten*. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.
- [5] Beem, John K., und Ehrlich, Paul E. (1981). *Global Lorentzian Geometry*. Marcel Dekker, Inc., New York.
- [6] Bekenstein, Jacob D. (1973). ‘Black holes and entropy’. *Phys. Rev.* **D 7**, 8, 2333–2346.
- [7] Bichteler, Klaus (1968). ‘Global existence of spin structures for gravitational fields’. *Journ. Math. Phys.* **9**, 6, 813–815.
- [8] Carmeli, Moshe (1977). *Group Theory and General Relativity*. McGraw-Hill, New York.
- [9] Cartan, Élie (1938). *Leçons sur la théorie des spineurs. I. Les spineurs de l’espace à trois dimensions*. Hermann, Paris.
- [10] Carter, Brandon (1970). ‘The commutation property of a stationary, axisymmetric system’. *Communications of Mathematical Physics* **17**, 233-238.
- [11] Chandrasekhar, Subrahmanyan (1983). *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press, New York.
- [12] Chernoff, Paul R. (1973). ‘Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations’. *Journal of Functional Analysis* **12**, 401–414.
- [13] Choquet-Bruhat, Yvonne, deWitt-Morette, Cécile, und Dillard-Bleick, Margaret (1982). *Analysis, Manifolds and Physics*. Revised Edition. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- [14] Dubrovin, B.A., Fomenko, A.T., Novikov, S.P. (1984). *Modern Geometry — Methods and Applications. Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*. Springer-Verlag, New York.
- [15] Duvaut, Georges, und Lions, Jacques Louis (1976). *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer Verlag, Berlin.

- [16] Flaherty, Edward Jr. (1980). 'Complex variables in Relativity'. In: A. Held (Ed.), *General Relativity and Gravitation. One Hundred Years After the Birth of Albert Einstein. Vol. II*. Plenum Press, New York.
- [17] Fulton, William, und Harris, Joe (1991). *Representation Theory. A First Course*. Springer-Verlag, New York.
- [18] Futterman, J. A. H., Handler, F. A., und Matzner, R. A. (1988). *Scattering From Black Holes*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [19] Gel'fand, I. M., Minlos, R. A., und Shapiro, Z. Ya. (1963). *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications*. Pergamon Press, Oxford.
- [20] Geroch, Robert (1968). 'Spinor structure of space-times in General Relativity. I'. *Journ. Math. Phys.* **9**, 11, 1739–1744.
- [21] Geroch, Robert (1970). 'Spinor structure of space-times in General Relativity. II'. *Journ. Math. Phys.* **11**, 1, 343–348.
- [22] Haag, Rudolf (1992). *Local Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras*. Springer-Verlag Berlin.
- [23] Hartman, Philip (1964). *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [24] Hawking, Stephen W. (1975). 'Particle creation by black holes'. *Communications of Mathematical Physics* **43**, 199–220.
- [25] Hawking, Stephen W. (1976). 'Black holes and thermodynamics'. *Physical Review D* **13**, 2, 191–197.
- [26] Hawking, Stephen W., und Ellis, G. F. R. (1973). *The Large Scale Structure of Space-time*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [27] Hein, Wolfgang (1990). *Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen*. Springer-Verlag, Berlin.
- [28] Jänich, Klaus (1992). *Vektoranalysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [29] Kalnins, E. G., & Williams, G. C. (1990). 'Symmetry operators and separation of variables for spin-wave equations in oblate spheroidal coordinates.' *J. Math. Phys.* **31** (7), 1739–1744.
- [30] Kerr, Roy P. (1963). 'Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics.' *Phys. Rev. Letters*, **11**, 5, 237–238.
- [31] Kramer, D., Stephani, H., Herlt, E., und MacCallum, M. (1980). *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge University Press, Cambridge [by arr. with VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin]
- [32] Landau, L. D., und Lifschitz, E. M. (1976). *Klassische Feldtheorie*. Akademie-Verlag Berlin.
- [33] Lichnerowicz, André (1968). 'Topics on space-time'. In: Cécile M. DeWitt, John. A. Wheeler (Eds.), *Batelle Rencontres*. W.A. Benjamin, Inc., New York.

- [34] Mazur, Paweł O. (1982). 'Proof of uniqueness of the Kerr-Newman black hole solution'. *J. Phys. A: Math. Gen.* **15**, 3173–3180.
- [35] Milnor, J. (1963). 'Spin structures on manifolds'. *L'Enseignement Mathématique* **9**, Ser. II, 198–203.
- [36] Minkowski, Hermann (1909). *Raum und Zeit. Vortrag, gehalten auf der 80. Naturforscher-Versammlung zu Köln am 21. September 1908*. B. G. Teubner, Leipzig.
- [37] Misner, Charles W., Thorne, Kip S., und Wheeler, John Archibald (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman and Co., San Francisco.
- [38] Mizohata, Sigeru (1973). *The Theory of Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [39] Newman, E. T., Couch, E., Chinnapared, K., Exton, A., Prakash, A., und Torrence, R. (1965). 'Metric of a rotating, charged mass'. *Journ. Math. Phys.* **6**, 6, 918–919.
- [40] Newman, E. T., und Janis, A. I. (1965). 'Note on the Kerr spinning-particle metric'. *Journ. Math. Phys.* **6**, 6, 915–917.
- [41] Newman, Ezra, & Penrose, Roger (1962). 'An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients'. *J. Math. Phys.* **3** (3), 566–577.
- [42] O'Neill, Barret (1983). *Semi-Riemannian Geometry*. Academic Press, New York.
- [43] Pauli, Wolfgang (1990). *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik. Neu herausgegeben und mit historischen Anmerkungen versehen von Norbert Straumann*. Springer-Verlag Berlin.
- [44] Penrose, Roger (1968). 'Structure of space-time'. In: C. M. DeWitt und J. A. Wheeler (Eds.), *Batelle Rencontres*. W. A. Benjamin, Inc., New York.
- [45] Penrose, Roger, und Rindler, Wolfgang (1984). *Spinors and Space-Time. Vol 1. 2-Spinor Calculus and Relativistic Fields*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [46] Lewis H. Ryder (1985). *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [47] Sachs, Rainer K., und Wu, Hung-Hsi (1977). *General Relativity for Mathematicians*. Springer-Verlag, New York.
- [48] Schmutzer, Ernst (1968). *Relativistische Physik*. B.G. Teubner, Leipzig.
- [49] Sexl, Roman U., und Urbantke, Helmuth K. (1987). *Gravitation und Kosmologie. Eine Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie*. BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim.
- [50] Sommerfeld, Arnold (1966). *Partielle Differentialgleichungen der Physik. 6. Auflage. Bearbeitet und ergänzt von F. Sauer*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig.
- [51] Stephani, Hans (1991). *Allgemeine Relativitätstheorie. Eine Einführung in die Theorie des Gravitationsfeldes. 4. Auflage*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- [52] Straumann, Norbert (1981). *Allgemeine Relativitätstheorie und relativistische Astrophysik*. Springer-Verlag, Berlin.
- [53] Sulanke, R., und Wintgen, P. (1972). *Differentialgeometrie und Faserbündel*. Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin/Birkhäuser, Basel.

- [54] Switzer, Robert M. (1975). *Algebraic Topology — Homotopy and Homology*. Springer-Verlag, Berlin.
- [55] Teukolsky, Saul A. (1973). ‘Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations.’ *The Astrophysical Journal* **185**, 635–647.
- [56] Thaller, Bernd (1992). *The Dirac Equation*. Springer-Verlag, Berlin.
- [57] Trautman, Andrzej (1980). ‘Fiber bundles, gauge fields, and gravitation’. In: A. Held (Ed.), *General Relativity and Gravitation. One Hundred Years After the Birth of Albert Einstein. Vol. I*. Plenum Press, New York.
- [58] Villalba, V. M., und Percoco, U. (1991). ‘Separation of variables and exact solutions to Dirac and Weyl equations in Robertson-Walker space-times’. *Journ. Math. Phys.* **31** (3), 715–720.
- [59] Weidmann, Joachim (1976). *Lineare Operatoren in Hilberträumen*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- [60] Wells, Raymond O’Neil (1980). *Differential Analysis on Complex Manifolds*. Springer-Verlag New York.
- [61] Zel’dovich, Ya. B. (1972). ‘Amplification of cylindrical electromagnetic waves reflected from a rotating body’. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **62**, 2076–2081 (*Sov. Phys. JETP* **35**, 6, 1085–87, 1972)

Index

Antisymmetrisierung, 10

Beobachter, 22
Bezugssystem, 22

Dyade, 8

Eigenzeit, 24
Energienorm, 5
Entfernung, 24

freier Wille, 7

Infeld-van der Waerden-Symbole, 11

Karte, 22
kausal, 15
Kausalität, 7
Kontraktion, 9
Koordinaten, 22

lichtartig, 15
Lichtkegel, 16
lokales Koordinatensystem, 22
Lorentz-Transformation, 15

metrischer Welttensor, 13
Minkowski-Tetrade, 13

Newman-Penrose-Tetrade, 16

orthochrone Lorentz-Transformation, 15

prinzipales Vierbein-Bündel, 7

raumartig, 15

see-saw, 9
Spin-Struktur, 60
Spinbein, 8
Spinor, 8
Spinorbündel, 8
Spinorfeld, 8
Spinorraum, 8
Symmetrischer Spinor, 10
Symmetrisierung, 10

Vergangenheit, 16

Welttensor, 12
Wille, 7

Zeit, 22
zeitartig, 15
zeitorientierbar, 17
Zukunft, 16