

Unitäre Darstellungen der Poincaré-Gruppe. Freie relativistische Felder

Andreas de Vries

FH Südwestfalen, University of Applied Sciences, Haldener Straße 182, D-58095 Hagen, Germany

e-mail: de-vries@fh-swf.de

Bochum, 1992

Dieser Aufsatz aus dem Sommer 1992 ist ein überblicksartiges Referat über die bahnbrechende und auch heute noch mit Gewinn zu lesende Arbeit von Wigner (1939), in der modernen Formulierung von Simms (1968).

Unitäre Darstellungen der Poincaré-Gruppe. Freie relativistische Felder

2.1. Semidirekte Produkte

Die Wirkung einer Gruppe H auf eine Gruppe N als Automorphismengruppe, $H \times N \rightarrow N$, $(h, n) \mapsto \varrho(h)(n)$, $\varrho: H \rightarrow \text{Aut}(N)$, erlaubt die Konstruktion einer größeren Gruppe: Definieren wir auf dem kartesischen Produkt $N \times H$ die Multiplikation

$$(n, h) \cdot (n', h') = (n \varrho(h)(n'), hh')$$

mit der Inversen

$$(n, h)^{-1} = (\varrho^{-1}(h)(n^{-1}), h^{-1}),$$

$(n, n' \in N, h, h' \in H)$, so erhalten wir eine Gruppe G , das *semidirekte Produkt* von N unter H bezüglich ϱ , Bezeichnung

$$G = N \rtimes H \quad \text{oder} \quad G = N \rtimes_{\varrho} H.$$

N und H sind via $n \mapsto (n, 1_H)$ bzw. $h \mapsto (1_N, h)$ Untergruppen von $N \rtimes H$, N ist sogar normal. Jedes Element $g \in N \rtimes H$ läßt sich also eindeutig schreiben als $g = nh$. Die Wirkung von H auf N ist in $N \rtimes H$ ein *innerer* Automorphismus. Also ist die Sequenz

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} N \rtimes H \xleftarrow[q]{p} H \longrightarrow 1$$

exakt; sie ist überdies *zerfallend* (d. h. es existiert ein Homomorphismus $q: H \rightarrow N \rtimes H$ mit $p \circ q = \text{id}_H$); s. Mackey (1968), Hein (1990).

Exakte zerfallende Sequenzen sind eine von vielen Möglichkeiten, semidirekte Produkte zu beschreiben. Ist z. B. eine exakte zerfallende Sequenz

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xleftarrow[q]{p} H \longrightarrow 1$$

gegeben, so gilt $G \cong N \rtimes_{\varrho} H$ mit $\varrho(h)(n) := q(h) i(n) q(h)^{-1}$ (Hein, 1990).

Ist umgekehrt eine Gruppe G mit Normalteiler N (d. h. $gNg^{-1} = N \forall g \in G$) und Untergruppe H gegeben, wobei H durch innere Automorphismen auf N wirkt, also $hNh^{-1} = N$ für $h \in H$, d. h. $\varrho(h)(n) := hnh^{-1}$, so folgt, daß genau dann $G \cong N \rtimes H$ ist, wenn $G = NH$ und $N \cap H = \{1\}$ gilt.

2.1.1. Beispiele. (i) Die Bewegungsgruppe des \mathbb{R}^n , die *Euklidische Gruppe*

$$E(n) = \mathbb{R}^n \rtimes SO(n).$$

Dabei beschreibt die (additive Abelsche) Gruppe \mathbb{R}^n die Translationen des Raums und $SO(n)$ die Rotationen um den Nullpunkt (Mackey, 1968).

(ii) Die volle Bewegungsgruppe des Minkowskiraums, die *Poincaré-Gruppe* oder *inhomogene Lorentz-Gruppe*

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}^4 \rtimes O(1, 3).$$

Sie hat vier Zusammenhangskomponenten, gegeben durch die vier Komponenten von $O(1, 3)$, deren charakteristische Elemente jeweils die Matrizen $E = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$

(Identität), $T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ (Zeitspiegelung), $P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ (Raumspiegelung) und $PT = \text{diag}(-1, -1, -1, -1)$ (Raum-Zeit-Spiegelung) sind. \mathbb{R}^4 beschreibt die additive Abelsche Gruppe der Raum-Zeit-Translationen. Sei

$$\mathcal{P}_0^+ = \mathbb{R}^4 \rtimes SO^+(1, 3)$$

die (zweifach zusammenhängende) Zusammenhangskomponente der Einheit.

(iii) Sei

$$\Delta := \left\{ \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & z e^{i\alpha} \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Δ ist Untergruppe von $SL(2, \mathbb{C})$. Seien $t(z)$ und $\delta(\alpha) \in \Delta$,

$$t(z) = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta(\alpha) = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix},$$

$z \in \mathbb{C}, \alpha \in [0, 2\pi)$. Mit der Überlagerung $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^+(1, 3)$ ist $\delta(\alpha)$ die Drehung um die x_3 -Achse mit dem Winkel 2α , während $t(z)$ eine Nulldrehung ist. Es gilt

- (a) $t(z)t(z') = t(z+z')$,
- (b) $\delta(\alpha)\delta(\alpha') = \delta(\alpha + \alpha' \bmod 2\pi)$,
- (c) $\delta(\alpha)t(z) = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & z e^{i\alpha} \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix} = t(e^{2i\alpha}z)\delta(\alpha)$,

$z, z' \in \mathbb{C}, \alpha, \alpha' \in [0, 2\pi)$. Aus (a) und (b) folgt, daß $T := \{t(z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ und $H := \{\delta(\alpha) \mid \alpha \in [0, 2\pi)\}$ Untergruppen von Δ sind. Mit (c) gilt

- (1) $\Delta = TH$: $\forall D \in \Delta \exists$ eindeutige $z \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in [0, 2\pi)$, so daß $D = t(z)\delta(\alpha)$.
- (2) T ist Normalteiler von Δ : $\delta(\alpha)T\delta(\alpha)^{-1} \subset T \forall \alpha \in [0, 2\pi)$;
- (3) H wirkt auf T als innerer Automorphismus: $\delta(\alpha)t(z)\delta(\alpha)^{-1} = t' := t(e^{2i\alpha}z) \forall \alpha \in [0, 2\pi)$.

Außerdem ist

- (4) $T \cap H = \{E\}$.

Aus (1) bis (4) folgt $\Delta = T \rtimes H$. Mit den Isomorphismen $T \rightarrow \mathbb{C}, t(z) \mapsto z$, und $H \rightarrow U(1), \delta(\alpha) \mapsto e^{i\alpha}$ ist

$$\Delta \cong \mathbb{C} \rtimes U(1) \quad \text{mit} \quad \varrho(e^{i\alpha})(z) = ze^{2i\alpha}.$$

Sei $\text{Spin}(2) = SO(2) \cong U(1)$, und sei $\varrho: \text{Spin}(2) \rightarrow SO(2)$,

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & -\sin \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

$\varphi \in [0, 4\pi)$, die zweifache Überlagerung von $SO(2)$ (s. o.). $\text{Spin}(2)$ wirkt auf \mathbb{R}^2 als innerer Automorphismus:

$$\text{Spin}(2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \left(A\left(\frac{\varphi}{2}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^t A^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = A(\varphi)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\Delta \cong \mathbb{R}^2 \rtimes \text{Spin}(2).$$

Semidirekte Produkte von Gruppen haben ihre Entsprechung für Lie-Algebren: Seien $\mathfrak{g}, \mathfrak{Q}$ und \mathfrak{H} Lie-Algebren, und sei $\varrho: \mathfrak{H} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{Q})$ der durch $\varrho(Y)(X) = [X, Y], X \in \mathfrak{Q}, Y \in \mathfrak{H}$, definierte Homomorphismus, wobei

$$\text{Der}(\mathfrak{N}) := \{ f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{N}) \mid f([X, X']) = [f(X), X'] + [X, f(X')] \quad \forall X, X' \in \mathfrak{N} \}$$

die *Derivationsalgebra* von \mathfrak{N} ist. \mathfrak{g} heißt (*inneres*) *semidirektes Produkt* von \mathfrak{N} und \mathfrak{H} , Bezeichnung $\mathfrak{g} = \mathfrak{N} \rtimes \mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{g} = \mathfrak{N} \ltimes \mathfrak{H}$, wenn gilt:

- (i) \mathfrak{N} ist Ideal von \mathfrak{g} (also $[\mathfrak{N}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{N}$), und \mathfrak{H} ist eine Unteralgebra von \mathfrak{g} ;
- (ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{H}$;
- (iii) Für $X, X' \in \mathfrak{N}$ und $Y, Y' \in \mathfrak{H}$ gilt

$$[X \oplus Y, X' \oplus Y'] = ([X, X'] + \rho(Y)(X) - \rho(Y')(X')) \oplus [Y, Y'].$$

2.2. Kausale und relativistische Invarianz in der Quantenmechanik

Seien $x, y \in \mathbb{R}^4$ die Koordinaten des Minkowski-Raums \mathbb{M} bezüglich des (frei fallenden) Beobachters $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$, $\gamma(\tau) = (\tau, 0, 0, 0)$. Für den Beobachter γ ist das Ereignis x durch das Ereignis y *beeinflussbar*, Bezeichnung

$$x < y,$$

wenn $y - x$ zeitartig und zukunftsgerichtet ist. Auf diese Weise erhält \mathbb{M} also eine geordnete Struktur, eine *Kausalität*, bezüglich des Beobachters γ . Sei $f \in \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ eine bijektive stetige Abbildung. Sie entspricht einem *Wechsel des Beobachters* bzw. des *Bezugssystems*; d. h. das Ereignis, welches im Bezugssystem des alten Beobachters die Koordinaten x hat, hat im Bezugssystem des neuen Beobachters die Koordinaten $f(x)$. f heißt *kausaler Automorphismus*, wenn

$$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

gilt, also wenn beide Beobachter dieselbe Auffassung von Kausalität haben. Nach Zeeman (1964) ist die Gruppe aller (*a priori* nicht linearen!) kausalen Automorphismen isomorph zu dem semidirekten Produkt

$$\mathbb{R}^4 \rtimes (O^+(1, 3) \times \mathbb{R}^+)$$

bezüglich der natürlichen Wirkung $O^+(1, 3) \times \mathbb{R}^+$ auf \mathbb{R}^4 , $(A, \lambda) \mapsto A \lambda \cdot x$. Mit anderen Worten wird die kausale Automorphismengruppe erzeugt von den *Translationen* $x \mapsto x + a$, $a \in \mathbb{R}^4$, den *orthochronen Lorentz-Transformationen* $x \mapsto Ax$, $A \in O^+(1, 3)$, und den *Dilatationen* $x \mapsto \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, mit der Verknüpfung

$$(a, A, \lambda) \cdot (b, B, \mu) = (a + A \lambda \cdot b, AB, \lambda \cdot \mu).$$

Die reinen Zustände eines *quantenmechanischen Systems* werden durch den projektiven Raum $\hat{\mathcal{H}}$ (*Strahlraum*) der eindimensionalen Unterräume eines separablen komplexen Hilbertraums \mathcal{H} dargestellt (Mackey, 1963 und – insbesondere für die mathematischen Grundlagen – Triebel, 1971). Für einen Vektor $\psi \in \mathcal{H}$, $\psi \neq 0$, sei

$$\hat{\psi} = \{ \lambda \psi \mid \lambda \in \mathbb{C} \}.$$

Das innere Produkt $\langle \psi, \varphi \rangle$ des Hilbertraums \mathcal{H} definiert eine reellwertige Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle: \hat{\mathcal{H}} \times \hat{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\langle \hat{\psi}, \hat{\varphi} \rangle = \frac{|\langle \psi, \varphi \rangle|^2}{\|\psi\|^2 \|\varphi\|^2}.$$

Die physikalische Interpretation ist, daß $\langle \hat{\psi}, \hat{\varphi} \rangle$ die *Übergangswahrscheinlichkeit* angibt, d. h. die Wahrscheinlichkeit, das System in dem Zustand $\hat{\psi}$ zu finden, wenn es sich im Zustand $\hat{\varphi}$ befindet. Sei

$$U(\mathcal{H}) := \{ A \in \text{Hom}(\mathcal{H}) \mid \langle A\psi, A\varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle \}$$

die Gruppe der *unitären Transformationen* von \mathcal{H} . Eine Transformation $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ heißt *anti-unitär*, wenn

$$\begin{aligned} A(\psi + \varphi) &= A\psi + A\varphi, \\ A\lambda\psi &= \bar{\lambda}A\psi, \\ \langle A\psi, A\varphi \rangle &= \overline{\langle \psi, \varphi \rangle} \end{aligned}$$

gilt. Sei $\tilde{U}(\mathcal{H})$ die Gruppe der unitären und anti-unitären Transformationen von \mathcal{H} . Da das Produkt zweier anti-unitärer Transformationen unitär ist, ist $U(\mathcal{H})$ Untergruppe von $\tilde{U}(\mathcal{H})$ mit Index 2. Mit der Einbettung $U(1) \rightarrow U(\mathcal{H}), e^{i\alpha} \mapsto e^{i\alpha} \cdot 1_{U(\mathcal{H})}$ ist $U(1)$ Untergruppe von $U(\mathcal{H})$. Sei weiter

$$\text{Aut}(\hat{\mathcal{H}}) := \{ T: \hat{\mathcal{H}} \rightarrow \hat{\mathcal{H}} \mid T \text{ bijektiv und } \langle T\hat{\psi}, T\hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{\psi}, \hat{\varphi} \rangle \forall \hat{\psi}, \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{H}} \},$$

die Gruppe der (die Übergangswahrscheinlichkeit erhaltenden) Automorphismen von $\hat{\mathcal{H}}$. Jede Transformation $A \in \tilde{U}(\mathcal{H})$ definiert durch

$$\hat{A}\hat{\psi} := \widehat{A\psi}$$

einen Automorphismus $\hat{A} \in \text{Aut}(\hat{\mathcal{H}})$. Sei schließlich $\pi: \tilde{U}(\mathcal{H}) \rightarrow \text{Aut}(\hat{\mathcal{H}}), \pi(A) = \hat{A}$. Dann gilt der fundamentale

2.2.1. Satz von Wigner (1959). Die Folge

$$1 \longrightarrow U(1) \longrightarrow \tilde{U}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\pi} \text{Aut}(\hat{\mathcal{H}}) \longrightarrow 1$$

ist exakt.

Zum Beweis siehe z. B. Biedenharn und Louck (1981).

Ist $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ein durch einen Beobachterwechsel gegebener Automorphismus, so bestimmt dieser eine bijektive Abbildung $T_f: \hat{\mathcal{H}} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}$, wobei $T_f\hat{\psi}$ denjenigen quantenmechanischen Zustand im Bezugssystem des neuen Beobachters darstellt, welcher der Zustand $\hat{\psi}$ für den alten Beobachter ist. Ist $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ein weiterer Beobachterwechsel, so soll *a priori* angenommen werden, daß

$$T_{fg} = T_f T_g.$$

Natürlich berechnet der neue Beobachter dann und nur dann die gleiche Übergangswahrscheinlichkeit, wenn $T_f \in \text{Aut}(\hat{\mathcal{H}})$. Berechnen nun alle Beobachter mit derselben Auffassung von Kausalität die gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten für identische Zustände, so erhalten wir einen Homomorphismus

$$T: \mathbb{R}^4 \rtimes (O^+(1, 3) \times \mathbb{R}^+) \longrightarrow \text{Aut}(\hat{\mathcal{H}}), \quad f \mapsto T_f.$$

Alle diese Homomorphismen liefern also die *kausale Invarianz* in der Quantenmechanik. Die Einschränkung der kausalen Invarianz auf die Poincaré-Gruppe P_0^+ , d. h. auf die Homomorphismen

$$T: \mathbb{R}^4 \rtimes SO^+(1, 3) \longrightarrow \text{Aut}(\hat{\mathcal{H}}),$$

drückt die *relativistische Invarianz* in der Quantenmechanik aus. Sei

$$U(\widehat{\mathcal{H}}) = \pi(U(\mathcal{H}))$$

das Bild der unitären Transformationen unter π . Damit liefert der Satz von Wigner die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow U(1) \longrightarrow U(\mathcal{H}) \longrightarrow U(\widehat{\mathcal{H}}) \longrightarrow 1.$$

Für eine zusammenhängende Lie-Gruppe G ist das Bild jedes Homomorphismus $T: G \rightarrow \text{Aut}(\widehat{\mathcal{H}})$ in $U(\widehat{\mathcal{H}})$ enthalten (Simms, 1968). Die relativistische Invarianz wird also ausgedrückt durch die Homomorphismen

$$T: \mathbb{R}^4 \rtimes SO^+(1, 3) \rightarrow U(\widehat{\mathcal{H}}).$$

Unter einer *projektiven unitären Darstellung* T einer topologischen Gruppe G verstehen wir einen stetigen Homomorphismus $T: G \rightarrow U(\widehat{\mathcal{H}})$. Eine *unitäre Darstellung* T von G ist ein stetiger Homomorphismus $T: G \rightarrow U(\mathcal{H})$, wobei $U(\mathcal{H})$ die starke Operatortopologie besitzt, siehe Simms (1968).

Die Frage nach der vollständigen Beschreibung der relativistischen Invarianz in der Quantenmechanik läßt sich also umformulieren: *Wie lauten die projektiven unitären Darstellungen der Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}_0^+ = \mathbb{R}^4 \rtimes SO^+(1, 3)$?*

Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit der universellen Überlagerung $p: \tilde{G} \rightarrow G$, wobei $\ker p = K$. Sei T eine projektive unitäre Darstellung von G , $T: G \rightarrow U(\widehat{\mathcal{H}})$. Dann erhalten wir mit dem Satz von Wigner das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & U(1) & \longrightarrow & U(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\pi} & U(\widehat{\mathcal{H}}) & \longrightarrow & 1 \\ & & & & & & \uparrow T & & \\ 1 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \tilde{G} & \xrightarrow{p} & G & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

wobei beide Zeilen exakt sind. $T \circ p$ ist also eine projektive unitäre Darstellung von \tilde{G} , und $(T \circ p)(K) = 1$.

2.2.2. Satz von Bargmann (1954). Sei \tilde{G} eine zusammenhängende und einfach zusammenhängende Lie-Gruppe mit der Eigenschaft, daß die 2. Kohomologiekategorie ihrer Lie-Algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ verschwindet, also $H^2(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathbb{R}) = 0$. Dann existiert für jede projektive unitäre Darstellung T von \tilde{G} eine Liftung $\tau: \tilde{G} \rightarrow U(\mathcal{H})$, die eine unitäre Darstellung von \tilde{G} ist, d. h. $T = \pi \circ \tau$:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & U(1) & \longrightarrow & U(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\pi} & U(\widehat{\mathcal{H}}) & \longrightarrow & 1, \\ & & & & \uparrow \tau & \nearrow T & & & \\ & & & & \tilde{G} & & & & \end{array}$$

Da mit $\widehat{SO}^+(1, 3) = SL(2, \mathbb{C})$ die universelle Überlagerung der Poincaré-Gruppe durch $\tilde{\mathcal{P}}_0^+ = \mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$ gegeben ist und ihre Lie-Algebra $\mathfrak{L}\tilde{\mathcal{P}}_0^+$ die Eigenschaft $H^2(\mathfrak{L}\tilde{\mathcal{P}}_0^+, \mathbb{R}) = 0$ hat (Bargmann, 1954), ist jede projektive unitäre Darstellung

$$T: \mathbb{R}^4 \rtimes SO^+(1, 3) \longrightarrow U(\widehat{\mathcal{H}})$$

von einer unitären Darstellung

$$\tau: \mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow U(\mathcal{H}),$$

induziert, so daß $\tau(\{\pm 1\}) \subset U(1)$ gilt. Ist τ irreduzibel, so heißt das quantenmechanische System *freies relativistisches Elementarteilchen*.

Sei $\tau: G \rightarrow U(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung einer allgemeinen Lie-Gruppe G , und sei \mathfrak{g} ihre Lie-Algebra. Für jedes $X \in \mathfrak{g}$ ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \rightarrow U(\mathcal{H}), \quad t \mapsto \tau \circ \exp tX$$

stetig differenzierbar (Hein, 1990, p. 210f). Wir erhalten also einen Homomorphismus $\mathfrak{R}\tau$ von Lie-Algebren,

$$\mathfrak{R}\tau: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathcal{H}),$$

d. h. eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $\mathfrak{R}\tau([X, Y]) = [\mathfrak{R}\tau(X), \mathfrak{R}\tau(Y)]$, nämlich

$$\mathfrak{R}\tau(X) = \left. \frac{d}{dt} \tau \circ \exp tX \right|_{t=0},$$

siehe Hein (1990) und Simms (1968). $\mathfrak{R}\tau(X)$ ist ein schiefadjungierter Operator auf \mathcal{H} .

Der Definitionsbereich des Operators $\mathfrak{R}\tau(X)$ ist die Menge der ψ , für die die Ableitung $\mathfrak{R}\tau(X)$ existiert. Es existiert eine dichte Menge $D_\tau \subset \mathcal{H}$, auf der $\mathfrak{R}\tau(X)$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ definiert und wesentlich schiefadjungiert ist (Triebel, 1972). Sei $S(D_\tau)$ die Lie-Algebra der schiefadjungierten Operatoren mit gemeinsamem Definitionsbereich D_τ . Dann ist

$$\mathfrak{R}\tau: \mathfrak{g} \rightarrow S(D_\tau)$$

ein Lie-Algebra-Homomorphismus [Simms, p. 20].

Jedem selbstadjungierten Operator A in \mathcal{H} entspricht via $\hat{A} \in \hat{\mathcal{H}}$ eine physikalische Observable; siehe z. B. Mackey (1968), 2-2. Der selbstadjungierte Operator $\frac{1}{t} \mathfrak{R}\tau(X)$ muß also eine physikalisch meßbare Größe darstellen. Die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe \mathcal{P}_0^+ ist

$$\mathfrak{R}\mathcal{P}_0^+ = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

($\mathfrak{R}\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4$) und wird von den Matrizen

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

und der Basis $P_k := e_k$, $k=0, \dots, 3$, von \mathbb{R}^4 erzeugt, vgl. Sengl und Urbantke (1976). Es gilt

$$R_\mu(t) = \exp tM_\mu, \quad B_\mu(t) = \exp tN_\mu \quad (\mu=1, 2, 3) \quad \text{und} \quad x_k(t) = \exp tP_k,$$

d. h.

$$M_\mu = \left. \frac{dR_\mu(t)}{dt} \right|_{t=0}, \quad N_\mu = \left. \frac{dB_\mu(t)}{dt} \right|_{t=0} \quad \text{und} \quad P_k = \left. \frac{dx_k(t)}{dt} \right|_{t=0},$$

(wobei $R_\mu(t)$ die Rotation um den Winkel t um die x_μ -Achse ist, $B_\mu(t)$ der entsprechende Lorentz-Boost, und $x_k(t)$ die Kurve entlang der x_k -Achse).

P_0 ist die *Energie* des Systems, P_1, P_2, P_3 sind die Komponenten des *Impulses*, M_1, M_2, M_3 die des *Drehimpulses* und N_1, N_2, N_3 die des *relativistischen Drehimpulses*.

Damit ist $\mathfrak{L}\mathcal{P}_0^+$ die Lie-Algebra der *relativistischen Observablen*. Bezeichnet man die Basis von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ mit M_{kl} , wobei

$$M_{0\mu} := N_\mu, \quad M_{\mu\nu} := \epsilon^{\mu\nu\lambda} M_\lambda, \quad M_{kl} = -M_{lk},$$

$k, l = 0, \dots, 3$, $\mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3$, so sind P_k und der *Pauli-Ljubanski-Vektor*

$$W_l := -\frac{1}{2} \epsilon_{ijkl} M^{ij} P^k$$

mit dem Permutationssymbol (Sexl und Urbantke, 1976, p. 82f)

$$\epsilon_{ijkl} = -\epsilon^{ijkl} = \begin{cases} 0, & \text{wenn 2 Indizes gleich sind} \\ +1, & \text{wenn } (ijkl) \text{ eine gerade} \\ -1, & \text{wenn } (ijkl) \text{ eine ungerade} \end{cases} \text{ Permutation von } (0123) \text{ ist.}$$

invariant unter \mathcal{P}_0^+ , und somit ebenso die Viererquadrate

$$M^2 = P_k P^k \quad \text{und} \quad W^2 = W_k W^k,$$

siehe Sexl und Urbantke (1976), p. 228, oder Simms (1968), p. 35ff.

2.3. Induzierte Darstellungen. Der Satz von Mackey.

Sei G eine lokal kompakte Gruppe, und sei K abgeschlossene Untergruppe. Sei $\sigma: K \rightarrow U(V)$ eine unitäre Darstellung von K in einen Hilbertraum V . Auf dem topologischen Produkt $G \times V$ sei die Äquivalenzrelation

$$(gk, v) \sim (g, \sigma(k)v)$$

für alle $k \in K$ gegeben,

$$G \times_K V = \{[g, v] \mid g \in G, v \in V\}$$

sei der Quotientenraum, und

$$\pi: G \times_K V \longrightarrow G/K$$

sei die Abbildung $[g, v] \mapsto gK$. Für $p \in G/K$ ist $\pi^{-1}(p) \cong V$ (?), hat also eine Hilbertraum-Struktur. Damit ist

$$\xi_\sigma := (G \times_K V, \pi, G/K, V; G)$$

ein Faserbündel, das G -Hilbertbündel (d. i. ein G -Bündel mit einem Hilbertraum als Faser, s. Simms, 1968). In G/K gibt es eine eindeutige nichtverschwindende Maßklasse M , die *invariante Maßklasse*, so daß für jedes Maß $\mu \in M$ und für jedes $g \in G$ das Maß $\mu_g(E) := \mu(g^{-1}E)$ (E Borel-Menge von G/K) auch in M liegt. Sei für $\mu \in M$

$$\mathcal{H}_\mu := \{ \psi: G/K \rightarrow G \times_K V \mid \psi \text{ ist Borelsch und } \int_{G/K} \langle \psi(p), \psi(p) \rangle d\mu(p) < \infty \},$$

wobei $\langle \psi(p), \varphi(p) \rangle$ das innere Produkt des Hilbertraums $\pi^{-1}(p)$ ist. Mit dem inneren Produkt $\langle \psi, \varphi \rangle := \int_{G/K} \langle \psi(p), \varphi(p) \rangle d\mu(p)$ und mit der Identifizierung von Schnitten ψ und φ , wenn $\psi = \varphi \mu$ - f. ü., ist \mathcal{H}_μ selbst ein Hilbertraum. Die Wirkung von G auf \mathcal{H}_μ , die durch

$$(g\psi)(p) := \sqrt{\frac{d\mu_g}{d\mu}(p)} g\psi(g^{-1}p)$$

für $p \in G/K$ definiert ist (wobei der Gewichtungsfaktor die Wurzel der Radon-

Nikodym-Ableitung ist), ist unitär auf \mathcal{H}_μ :

$$\begin{aligned} \langle g\psi, g\varphi \rangle &= \int \frac{d\mu_g}{d\mu}(p) \langle \psi(g^{-1}p), \varphi(g^{-1}p) \rangle d\mu(p) = \int \langle \psi(g^{-1}p), \varphi(g^{-1}p) \rangle d\mu(g^{-1}p) \\ &= \langle \psi, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, daß diese Wirkung von G auf \mathcal{H}_μ eine unitäre Darstellung von G liefert, die wir mit $T_\mu(\xi_\sigma)$ bezeichnen. Da für alle $\mu \in M$ die T_μ 's äquivalente Darstellungen sind, bezeichnet man diese Darstellung mit $T(\xi_\sigma)$. Dies ist die von σ induzierte Darstellung von G (Mackey, 1968).

Sei G eine separable lokal kompakte Gruppe mit Abelschem Normalteiler N und einer Untergruppe H , so daß $G = N \rtimes H$ ist. Ein Charakter χ von N ist ein stetiger Homomorphismus

$$\chi: N \rightarrow U(1).$$

Die Menge \hat{N} der Charaktere bildet mit der Multiplikation $(\chi\chi')(n) = \chi(n)\chi'(n)$ eine Abelsche Gruppe. Bezüglich der kompakt-offenen Topologie ist \hat{N} eine separable lokal kompakte Gruppe, das Dual von N , vgl. Hewitt & Ross (1963), § 23. Die Wirkung $n \mapsto gng^{-1}$ von G auf N induziert eine Wirkung von

G auf \hat{N} , $(g\chi)(n) = \chi(g^{-1}ng)$. Für $\chi \in \hat{N}$ sei

$$G_\chi := \{g\chi \mid g \in G\}$$

der Orbit oder die Bahn von χ unter G (dann ist \hat{N} disjunkte Vereinigung von Orbits), und $G_\chi := \{g \in G \mid g\chi = \chi\}$ sei die Isotropiegruppe von χ unter G . Da N Abelsch ist, wirkt N trivial auf sich und damit auf \hat{N} , so daß $N \subset G_\chi$. Dann heißt die Isotropiegruppe von χ unter H ,

$$L_\chi := H \cap G_\chi$$

die kleine Gruppe von χ , und es gilt

$$G_\chi = N \rtimes L_\chi,$$

Simms (1968), Wigner (1939). Mit der Borelsche Mengen erhaltenden und mit G kommutierenden Bijektion $g\chi \mapsto gG_\chi$ und unter sehr allgemeinen Voraussetzungen (s. Bourbaki, 1965) ist $G_\chi \cong G/G_\chi$ (Simms, 1968, p. 49).

Sei σ eine unitäre Darstellung der kleinen Gruppe L_χ mit dem Darstellungsraum V . Dann ist

$$\chi\sigma: N \rtimes L_\chi \rightarrow V, \quad (n, l) \mapsto \chi(n)\sigma(l)$$

ein unitäre Darstellung von $G_\chi = N \rtimes L_\chi$ in V . Sei

$$\xi_\chi^\sigma := (G \times_{(N \rtimes L_\chi)} V, \pi, G_\chi, V; G)$$

das durch $\chi\sigma$ definierte G -Hilbertbündel. Es gibt also für jede unitäre Darstellung der kleinen Gruppe ein G -Bündel ξ_χ^σ über dem Orbit G_χ .

Sei G eine separable lokal kompakte Gruppe mit Abelschem Normalteiler N und Untergruppe H , so daß $G = N \rtimes H$; ferner enthalte \hat{N} eine Borelsche Teilmenge, die jeden Orbit in \hat{N} unter G in genau einem Punkt schneidet. Dann heißt G regulär.

2.3.1. Satz von Mackey (1952). Sei $G = N \rtimes H$ reguläres semidirektes Produkt. Dann gilt:

(i) Für jeden Charakter $\chi \in \widehat{N}$ und jede irreduzible unitäre Darstellung σ von L_χ ist $T(\xi_\chi^\sigma)$ eine irreduzible unitäre Darstellung von G .

(ii) Umgekehrt ist jede irreduzible unitäre Darstellung von G äquivalent zu einer der Form $T(\xi_\chi^\sigma)$, wobei der Orbit $G\chi$ eindeutig und σ bis auf Äquivalenz bestimmt ist.

Die unitäre Darstellung $T(\xi_\chi^\sigma)$ nimmt eine besonders einfache Form an, wenn man sie einschränkt auf die Untergruppe N . Sei $\psi: G\chi \rightarrow G \times_{N \rtimes H} V$ ein Schnitt des Bündels ξ_χ^σ , und sei $n \in N$. Für $p \in G\chi \subset \widehat{N}$ gilt $p = g\chi$ für ein $g \in G$, so daß $\psi(p) = [g, v]$ für ein $v \in V$. Es folgt $(n\psi)(p) = p(n)[g, v] = n(p)\psi(p)$, wobei n als eine Funktion $n: \widehat{N} \rightarrow N$, definiert durch $n(p) := p(n)$, aufgefaßt wird.

Da N trivial auf \widehat{N} wirkt, ist die Abbildung $H/L_\chi \rightarrow G\chi$, $hL_\chi \mapsto h\chi$, bijektiv. Sei $\omega: G\chi \rightarrow H$ ein Schnitt des Bündels $H \rightarrow H/L_\chi \cong G\chi$, d.h. $\omega(p)\chi = p$. Für jeden Schnitt $\psi: G\chi \rightarrow G \times_{N \rtimes H} V$ des Bündels ξ_χ^σ gibt es dann einen eindeutigen Ausdruck

$$\psi(p) = [\omega(p), \psi_\omega(p)]$$

für eine Funktion $\psi_\omega: G\chi \rightarrow V$. Sei \mathcal{H} der Hilbertraum der quadratintegrablen Borelschen Schnitte ψ des Bündels ξ_χ^σ , und sei

$$\mathcal{H}_\omega = \{ \psi_\omega: G\chi \rightarrow V \mid \exists \psi \in \mathcal{H} \text{ mit } \psi(p) = [\omega(p), \psi_\omega(p)] \}$$

der dadurch induzierte Hilbertraum. Das innere Produkt in \mathcal{H}_ω ist durch

$$\langle \psi_\omega, \varphi_\omega \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle = \int_{G\chi} \langle \psi(p), \varphi(p) \rangle d\mu(p) = \int_{G\chi} \langle \psi_\omega, \varphi_\omega \rangle d\mu(p)$$

gegeben, also durch das gewöhnliche innere Produkt von Funktionen $G\chi \rightarrow V$. ψ_ω ist im allgemeinen nur dann eine Borelfunktion, wenn ω ein Borel-Schnitt ist. Sei nun $T: H \rightarrow \mathcal{H}_\omega$ die durch

$$(T(h)\psi_\omega)(p) = \sigma(\omega(p)^{-1}h\omega(h^{-1}p)) \psi_\omega(h^{-1}p)$$

definierte unitäre Darstellung von H in den Hilbertraum \mathcal{H}_ω . Die Gruppe L_χ wirkt auf das Bündel $H \rightarrow G\chi (\cong H/L_\chi)$ durch

$$\begin{array}{ccc} G\chi & \longrightarrow & G\chi, & p & \longmapsto & lp \\ \omega \downarrow & & \downarrow \omega & & & \\ H & \longrightarrow & H, & h & \longmapsto & lhl^{-1}, \end{array}$$

$l \in L_\chi$. Sei $X \in \mathfrak{L}L_\chi$. Die Wirkung des Operators $\mathfrak{L}T$ auf \mathcal{H}_ω ist besonders einfach, wenn ω ein äquivarianter Schnitt des Bündel $H \rightarrow G\chi$ bezüglich der Wirkung der einparametrischen Gruppe $t \mapsto \exp tX$ ist, d. h.

$$\omega((\exp tX)p) = (\exp tX)\omega(p)(\exp -tX)$$

für $t \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$T((\exp tX)\psi_\omega)(p) = \sigma(\exp tX)\psi_\omega((\exp -tX)p),$$

und

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}T(X)\psi_\omega)(p) &= \frac{d}{dt} \left(T(\exp tX)\psi_\omega \right) (p) \Big|_{t=0} \\ &= \mathfrak{L}\sigma(X)(\psi_\omega(p)) + \frac{d}{dt} \psi_\omega((\exp -tX)p) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß $\mathfrak{E}T(X)$ die Summe zweier Operatoren auf \mathcal{H}_ω ist. Da $\sigma(t): \mathcal{H}_\omega \rightarrow \mathcal{H}_\omega$, $\psi_\omega \mapsto \sigma(t)\psi_\omega$, ein unitärer Operator auf \mathcal{H}_ω ist, ist $\mathfrak{E}\sigma(X)$ Erzeuger einer einparametrischen Gruppe unitärer Transformationen und daher schiefadjungiert nach dem Satz von Stone (1932) [Theorem B]. Ebenso ist $\mathfrak{E}T(X)$ mit dem Satz von Stone schiefadjungiert; und somit schließlich auch der zweite Summand von $\mathfrak{E}T(X)$. Also ist der Operator $i^{-1}\mathfrak{E}T(X) = S_\omega(X) + O_\omega(X)$ selbstadjungiert, wobei

$$S_\omega(X) := \frac{1}{i} \mathfrak{E}\sigma(X) \quad \text{und} \quad (O_\omega(X)\psi_\omega)(p) := \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \psi_\omega(\exp(-tX)p) \Big|_{t=0}$$

sind.

2.4. Klassifikation freier relativistischer Teilchen.

Um die freien relativistischen Elementarteilchen zu klassifizieren, muß man die irreduziblen unitären Darstellungen der universellen Überlagerung der Poincaré-Gruppe $G := \tilde{\mathcal{P}}_0^+ = \mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$ finden.

Jedes $p \in \mathbb{R}^4$ definiert einen Charakter $\chi_p: \mathbb{R}^4 \rightarrow U(1)$,

$$\chi_p(x) = e^{i(p, x)},$$

wobei $(p, x) := p_j x^j = \eta_{ij} p^i x^j$ das Lorentz-Produkt ist. Die Abbildung $p \mapsto \chi_p$ ist ein Isomorphismus von \mathbb{R}^4 in seine Charaktergruppe $\hat{\mathbb{R}}^4$. Ist $A \in SL(2, \mathbb{C})$, so folgt

$$\chi_{Ap}(x) = e^{i(Ap, x)} = e^{i(p, A^{-1}x)} = \chi_p(A^{-1}x) = A\chi_p(x),$$

d. h. der Isomorphismus $\mathbb{R}^4 \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^4$ läßt die Wirkung von $SL(2, \mathbb{C})$ invariant. Wir können also \mathbb{R}^4 und $\hat{\mathbb{R}}^4$ identifizieren, d. h.

$$p(x) = x(p) = e^{i(p, x)}$$

Die Orbits von \mathbb{R}^4 unter $SL(2, \mathbb{C})$ sind wegen der Überlagerung $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^+(1, 3)$ die Orbits von $SO^+(1, 3)$. Diese Orbits sind mit $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$,

$$M_+^\mu = \{p \in \mathbb{R}^4 \mid (p, p) = \mu > 0, p_0 > 0\} \quad (\text{Massenschale}),$$

$$M_-^\mu = \{p \in \mathbb{R}^4 \mid (p, p) = \mu > 0, p_0 < 0\},$$

$$M^{-\mu} = \{p \in \mathbb{R}^4 \mid (p, p) = -\mu < 0\} \quad (\text{raumartiges Hyperboloid}),$$

$$M_+^0 = \{p \in \mathbb{R}^4 \mid (p, p) = 0, p_0 > 0\} \quad (\text{Zukunftslichtkegel}),$$

$$M_-^0 = \{p \in \mathbb{R}^4 \mid (p, p) = 0, p_0 < 0\} \quad (\text{Vergangenheitslichtkegel})$$

$$\{0\} \quad (\text{Nullpunkt}).$$

Denn es gilt

(i) Jeder Punkt $p \in \mathbb{R}^4$ kann durch eine räumliche Rotation in die Halbebene $\{p \mid p_1 = p_2 = 0, p_3 \geq 0\}$ abgebildet werden.

(ii) Die Orbits dieser Halbebene unter der Gruppe der Lorentz-Boosts $\{B_3(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ sind die Hyperbeln $\{p_0^2 - p_3^2 = c > 0, p_0 > 0\}$, $\{p_0^2 - p_3^2 = c > 0, p_0 < 0\}$ und $\{p_0^2 - p_3^2 = -c < 0\}$, die Geraden $\{p_0^2 - p_3^2 = 0, p_0 > 0\}$ und $\{p_0^2 - p_3^2 = 0, p_0 < 0\}$, sowie der Punkt $\{0\}$.

(iii) Die Funktion $p \mapsto (p, p) = \eta_{ij} p^i p^j$ ist konstant auf jedem Orbit.

(iv) Jeder Orbit ist zusammenhängend, da $SL(2, \mathbb{C})$ zusammenhängend ist.

Mit (i) und (ii) folgt, daß jede der Mengen M_+^μ , M_-^μ , $M^{-\mu}$, $\mu > 0$, und

$M_+^0 \cup M_-^0 \cup \{0\}$ in jeweils einem Orbit enthalten sind, und mit (iii) und (iv) folgt, daß keine zwei dieser Mengen im selben Orbit enthalten sind.

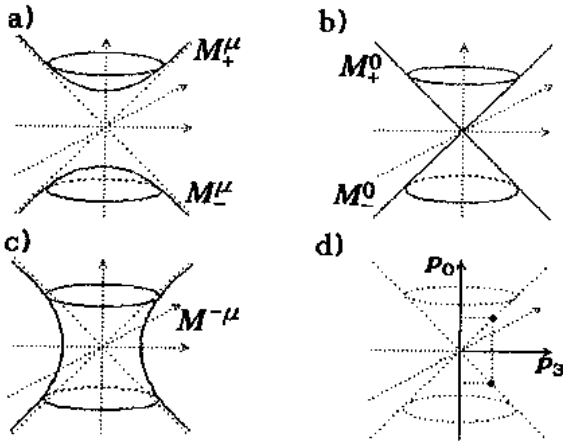


Fig. 4. a)-c). Die Orbits von \mathbb{R}^4 unter $SL(2, \mathbb{C})$. d) Die Borel-Menge E , die jeden Orbit einmal schneidet.

2.4.1. Bemerkung. $\mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$ ist ein reguläres semidirektes Produkt, da die Borelmenge

$$E = \{(p_0, 0, 0, 0) \mid p_0 \in \mathbb{R}\} \\ \cup \{(0, 0, 0, p_3) \mid p_3 \in \mathbb{R}\} \\ \cup \{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 0, 1)\}$$

jeden Orbit in genau einem Punkt schneidet.

2.4.2. Satz. Für jeden Orbit Gx mit Repräsentant $x \in \mathbb{R}^4$ ergeben sich folgende kleine Gruppen:

Orbit Gx	Repräsentant x	Kleine Gruppe L_x
M_+^μ	$(\sqrt{\mu}, 0, 0, 0)$	$SU(2)$
M_-^μ	$(-\sqrt{\mu}, 0, 0, 0)$	$SU(2)$
$M^{-\mu}$	$(0, 0, \sqrt{\mu}, 0)$	$SL(2, \mathbb{R})$
M_+^0	$(1, 0, 0, 1)$	Δ
M_-^0	$(-1, 0, 0, 1)$	Δ
$\{0\}$	$(0, 0, 0, 0)$	$SL(2, \mathbb{C})$

Beweis. (i) Für die Orbits M_\pm^μ sehen wir, daß die Repräsentanten $x = (\pm\sqrt{\mu}, 0, 0, 0)$ den Spinoren $X^{AB'} = \sigma_x = \pm\sqrt{\mu} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ entsprechen. Damit ist

$$L_x = L_\chi = \{A \in SL(2, \mathbb{C}) \mid A \sigma_x A^* = \sigma_x\} = \{A \mid AA^* = 1\} = SU(2).$$

(ii) Im Fall des Orbits $M^{-\mu}$ entspricht der Repräsentant $(0, 0, \sqrt{\mu}, 0)$ dem Spinor $X^{AB'} = \sigma_x = i\sqrt{\mu} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, d. h.

$$L_x = L_\chi = \left\{ A \mid A \sigma_x A^* = \sigma_x \right\} = \left\{ A \mid A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ = \left\{ A \mid A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} A^* = A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} A^T \right\} = \left\{ A \mid A^* = A^T \right\} = SL(2, \mathbb{R}).$$

Hierbei benutzen wir die Eigenschaft $A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \forall A \in SL(2, \mathbb{C})$.

(iii) Für den Orbit M_+^0 gilt: Der Repräsentant $x = (1, 0, 0, 1)$ entspricht dem Spinor $X^{AB'} = \sigma_x = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, so daß für die kleine Gruppe

$$L_x = L_\chi = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \mid \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \mid a\bar{a} = 1, c = 0 \right\} = \Delta$$

folgt. Entsprechend folgt für M^0 und seinem Repräsentanten $x = (-1, 0, 0, 1)$, dem der Spinor $X^{AB'} = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ entspricht, daß

$$L_x = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \mid d\bar{d} = 1, b = 0 \right\} \cong \Delta.$$

□

Sei nun $T = T(\xi \chi)$ eine irreduzible unitäre Darstellung von $G = \mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$. Die Wirkung $T(x)$ für $x \in \mathbb{R}^4$ auf einen Schnitt ψ des Hilbertbündels $\xi \chi$ mit dem Basisraum Gx als Orbit lautet $(T(x)\psi)(p) = x(p)\psi(p) = e^{i(p, x)}\psi(p)$, d. h.

$$T(x) = e^{i(p, x)}.$$

Sei $\pi_k \in \mathfrak{R}^4$, $k = 0, \dots, 3$, das Lie-Algebra-Element, das den Komponenten des Energie-Impulstensors entspricht. Dann gilt z. B. für $k = 0$

$$T(\exp t\pi_0) = T((t, 0, 0, 0)) = e^{itp_0},$$

analog folgt $T(\exp t\pi_\alpha) = \exp(-itp_\alpha)$, ($\alpha = 1, 2, 3$), d. h. die selbstadjungierten Operatoren

$$P_0 := i^{-1}\mathfrak{L}T(\pi_0) = p_0 \quad \text{und} \quad P_\alpha := i^{-1}\mathfrak{L}T(\pi_\alpha) = -p_\alpha$$

($\alpha = 1, 2, 3$), die Energie- und Impulsoperatoren, sind Multiplikationsoperatoren, und der *Massenoperator*

$$M^2 = P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2$$

ist die Multiplikation mit dem Lorentz-Produkt (p, p) , das auf dem Orbit Gx konstant ist. Das System ist also ein Eigenraum des Massenoperators, und sein Eigenwert, die Masse m , ist der auf dem Orbit Gx konstante Wert $\sqrt{(p, p)}$. Damit ergibt sich die folgende Tabelle des Spektrums des Energieoperators $E = P_0$ und der Masse m des Teilchens, das der irreduziblen Darstellung $T(\xi \chi)$ entspricht. Dabei hängt es nur von dem Orbit Gx und nicht von σ ab.

Orbit	Energiespektrum	Masse m
M_+^μ	$[\sqrt{\mu}, \infty)$	$\sqrt{\mu}$
M_-^μ	$(-\infty, -\sqrt{\mu}]$	$\sqrt{\mu}$
$M^{-\mu}$	$(-\infty, \infty)$	$i\sqrt{\mu}$
M_+^0	$(0, \infty)$	0
M_-^0	$(-\infty, 0)$	0
$\{0\}$	$\{0\}$	0

($\mu > 0$). Der Orbit $M^{-\mu}$ ist wegen der imaginären Masse auszuschließen, da der Massenoperator nicht selbstadjungiert und damit keine physikalische Observable ist (Physikalisch bedeutet dies, daß ein Teilchen vorliegt, dessen 3-Impuls p und Energie E der Ungleichung $E < c|p|$ genügen, was aus der Energie-Impuls-Relation $E^2 - c^2 p^2 = c^2 m^2$ folgt). Das einzige Teilchen mit Energiespektrum $\{0\}$ ist der Vakuumzustand. Schließen wir dann noch Zustände negativer Energie aus, so bleiben uns die Zustände zu den Orbits M_+^μ , $\mu > 0$, und M_+^0 , die Teilchen mit positiver bzw. verschwindender Masse entsprechen.

2.5. Drehimpuls und Spin.

Der selbstadjungierte Operator $M^{12} = i^{-1} \mathfrak{R} T(m_{12})$ ist der Drehimpulsoperator der Drehung um die x_3 -Achse. Die kleine Gruppe ist für $m > 0$ $L_x = SU(2)$, für $m = 0$ $L_x = \Delta$. In beiden Fällen ist die einparametrische Untergruppe von $SL(2, \mathbb{C})$

$$t \mapsto \exp tm_{12} = \delta\left(\frac{t}{2}\right)$$

auch Untergruppe von L_x . Das Maß

$$d\mu(p) = \frac{1}{p_0} dp_1 dp_2 dp_3$$

ist invariant für den Orbit Gx für $x = (\sqrt{c}, 0, 0, 0)$ und $x = (1, 0, 0, 1)$. Gesucht ist nun ein unter Rotationen um die x_3 -Achse äquivarianter Schnitt $\omega: Gx \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$. Damit ω ein Schnitt ist, muß

$$\omega(p)x = p$$

gelten. Die physikalische Interpretation ist, daß für $m > 0$ $\omega(p)$ eine Lorentz-Transformation in das *Ruhesystem* des Teilchens ist, d. h. ein klassisches Teilchen mit Vierergeschwindigkeit $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ im alten Bezugssystem hat die Vierergeschwindigkeit $x = (\sqrt{c}, 0, 0, 0)$; für $m = 0$ ist $\omega(p)$ ein Wechsel des Bezugssystems, so daß das klassische Photon mit Vierergeschwindigkeit p nun die Vierergeschwindigkeit $x = (1, 0, 0, 1)$ hat, d. h. sich entlang der x_3 -Achse bewegt. Vgl. Simms (1968), p. 65. Für $m = 0$ ist ω die Komposition des Lorentz-Boosts $(1, 0, 0, 1) \mapsto (p_0, 0, 0, p_0)$ und der Rotation $(p_0, 0, 0, p_0) \mapsto (p_0, p_1, p_2, p_3)$.

Der Schnitt $\omega: Gx \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ reduziert den Hilbertraum \mathcal{H} der ξ^X -Schnitte auf den Hilbertraum \mathcal{H}_ω von Wellenfunktionen $\psi_\omega: Gx \rightarrow V$, wobei V der Darstellungsraum der Darstellung $\sigma: L_x \rightarrow \text{Aut}(V)$ von L_x ist. Der Hilbertraum V ist die Faser des Bündels ξ^X , und $\dim V$ ist die Anzahl der *Polarisationszustände* des relativistischen Teilchens. Die unitäre Darstellung $T = T(\xi^X)$ induziert eine unitäre Darstellung T_ω auf \mathcal{H}_ω . Der selbstadjungierte Drehimpulsoperator

$$M_\omega^{12} := i^{-1} \mathfrak{R} T_\omega(m_{12})$$

auf \mathcal{H}_ω ist als die Summe

$$M_\omega^{12} = S_\omega^{12} + O_\omega^{12}$$

Dabei hat $S_\omega^{12} = i^{-1} \mathfrak{R} \sigma(m_{12})$ ein Spektrum in V , und es gilt

$$\begin{aligned} (O_\omega^{12} \psi_\omega) &= \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \psi_\omega(\exp(-tm_{12})p) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \psi_\omega(p_0, p_1 \cos t - p_2 \sin t, p_1 \sin t + p_2 \cos t, p_3) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{i} \left(p_1 \frac{\partial}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} \right) \psi_\omega(p). \end{aligned}$$

Die physikalische Größe, die die Observable S_ω^{12} darstellt, heißt *Spin-Drehimpuls* des Teilchens bezüglich des Schnitts ω , und $O_\omega^{12} = i^{-1} (p_1 \frac{\partial}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_1})$ stellt den *Bahndrehimpuls* des Teilchens dar. Der größte Absolutbetrag der Eigenwerte von S_ω^{12} heißt *Spin* des Teilchens.

Für den Fall positiver Masse, $m > 0$, siehe Simms (1968), p. 68f. Betrachten wir masselose Teilchen, d. h. sei $m = 0$. Für die kleine Gruppe $L_x = \Delta$ gilt

$$L_x \cong \mathbb{R}^2 \rtimes \text{Spin}(2).$$

Die Orbits in \mathbb{R}^2 unter $\text{Spin}(2)$ sind die Orbits in \mathbb{R}^2 unter Rotationen $SO(2)$ und

das sind der Ursprung $\{(0, 0)\}$ und die Kreise $K_c := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = c^2\}$. Damit ist Δ ein reguläres semidirektes Produkt, und der Satz von Mackey kann erneut angewandt werden. Für jeden Orbit wählen wir Repräsentanten und bestimmen die kleinen Gruppen wie folgt:

Orbit Δx	Repräsentant x	Kleine Gruppe L_x
$\{(0, 0)\}$	$(0, 0)$	$\text{Spin}(2)$
K_μ	$(\mu, 0)$	$\{\pm E\} \cong \mathbb{Z}_2$

Es sind keine Teilchen bekannt, die man mit den Orbits K_μ verknüpfen könnte. Wir beschränken uns also auf den Orbit $\{(0, 0)\}$. Jede irreduzible unitäre Darstellung von $\text{Spin}(2)$ ist eindimensional (denn $\text{Spin}(2)$ ist Abelsch), also von der Form $\text{Spin}(2) \rightarrow U(1)$,

$$A\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mapsto e^{ir\varphi} \quad (\varphi \in [0, 4\pi)),$$

$r = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots$. Die induzierte Darstellung $\tau_r: \mathbb{R}^2 \rtimes \text{Spin}(2) \rightarrow U(1)$ lautet

$$(x, y, A\left(\frac{\varphi}{2}\right)) \mapsto e^{ir\varphi}.$$

Damit folgt $\tau_r: i(z) \delta(\alpha) \mapsto e^{2ir\alpha}$ ($z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$), also $\exp tm_{12} = \delta(t/2) \mapsto e^{irt}$

$$\frac{1}{i} \mathfrak{B}\tau_r(m_{12}) = r.$$

Das Teilchen $T(\xi \frac{\chi}{\sigma})$ mit Masse $m=0$ hat also Spin $|r|$ (um die x_3 -Achse). Zu gegebenem Spin s ($2s \in \mathbb{Z}$) gibt es also genau zwei masselose Teilchen, τ_s und τ_{-s} . Das Hilbertbündel hat eine eindimensionale Faser in jedem dieser Fälle, so daß es genau zwei Polarisationszustände für jedes masselose Teilchen mit Spin s gibt.

Beispiele freier relativistischer Elementarteilchen sind das *Elektron* e^- ($m > 0$, $s = 1/2$), das *Neutrino* ν ($m = 0$, $s = 1/2$), das *Photon* ($m = 0$, $s = 1$) und das *Gravitino* ($m = 0$, $s = 2$).

Literatur

- Biedenharn, L. C., und Louck, James D. (1981). *Angular Momentum in Quantum Physics: Theory and Application*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications; v. 8. Addison-Wesley Publishing Company, Reading.
- Bourbaki, Nicolas (1965). *Éléments de mathématique. Livre VI: Intégration*. Hermann, Paris.
- Hein, Wolfgang (1990). *Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen*. Springer-Verlag, Berlin.
- Hewitt, S. E., und Ross, K. (1973). *Abstract Harmonic Analysis. Vol I*. Springer-Verlag, New York.
- Mackey, George (1952). Induced representations of locally compact groups I. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **35**, 537-545.
- Mackey, George W. (1963). *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. W.A. Benjamin, New York.
- Mackey, George W. (1968). *Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics*. W. A. Benjamin, New York.
- Soxl, Roman U., und Urbantke, Helmuth K. (1976). *Relativität, Gruppen, Teilchen*. Springer-Verlag, Wien.
- Simms, D. J. (1968). *Lie Groups and Quantum Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Stone, M. H. (1932). On one-parameter unitary groups in Hilbert space. *Ann. of Math.* **33**, 643-648.
- Wigner, Eugene P. (1939). On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group. *Ann. of Math.* **40**, 149-204.
- Wigner, Eugene P. (1959). *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. Academic Press, New York.
- Zeeman, E. C. (1964). Causality implies the Lorentz group. *Journal of Mathematical Physics*, **5**, 490-493.