Dispersion skalarer lichtartiger Wellen in Raumzeiten

Andreas de Vries

FH Südwestfalen, University of Applied Sciences, Haldener Straße 182, D-58095 Hagen, Germany

e-mail: de-vries@fh-swf.de

Bochum, 1993

In diesem im Wintersemester 1992/93 entstandenen Aufsatz wird das Verhalten skalarer ("Spin-0") Wellen in Raumzeiten behandelt, das sich mit der Dispersion von Wellen in einem Medium vergleichen läßt. Wesentlich für diesen Zugang ist die Einführung eines komplexen Eikonals. Damit ist die Wellengleichung äquivalent zu der komplexen Eikonalgleichung (32) auf Seite 65. Sie gilt exakt, im Gegensatz zur reellen Eikonalgleichung in der geometrischen Optik. Im speziellen Fall einer Kerr-Newman-Raumzeit entspricht damit die Superradianz bestimmter Wellenmoden einem Überschallphänomen.

Dispersion skalarer lichtartiger Wellen in Raumzeiten

1. Homogene Funktionen

Für einen beliebigen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^p$ und einen Vektor $\theta \in \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$, benützen wir im folgenden die gewöhnlichen Bezeichnungen

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p, \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!,$$

$$x^\alpha = x^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x^{\alpha_p}, \qquad D_\theta^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \theta_1^{\alpha_1} \cdots \partial \theta_p^{\alpha_p}}.$$

Definition 1. Sei $p \in \mathbb{N}$, und sei $f: \mathbb{R}^p \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. f heißt *homogen vom Grad* $g \in \mathbb{R}$ oder *g-homogen*, wenn für jedes $\lambda \in (0, \infty)$ und $\theta \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ gilt

$$f(\lambda\theta) = \lambda^g f(\theta). \tag{1}$$

Die Nullfunktion $f(\theta) \equiv 0$ ist homogen vom Grad g mit $g \in \mathbb{R}$ beliebig. Die konstanten Funktionen $f(\theta) \equiv c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, sind homogen vom Grad $g = 0$. In Fig. 1 sind die Graphen einiger homogener Funktionen aufgeführt.

Bemerkung 2. Sind $f, f_1, f_2: \mathbb{R}^p \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$ homogene Funktionen vom Grad g, so ist die Funktion $f_1 + f_2$ homogen vom Grad g, die Funktion $f_1 \cdot f_2$ homogen vom Grad $2g$ und die Funktion $(f)^r$ für $r \in \mathbb{R}$ homogen vom Grad $g \cdot r$. Dies folgt aus den offensichtlichen Identitäten $(f_1 + f_2)(\lambda\theta) = \lambda^g(f_1(\theta) + f_2(\theta))$, $(f_1 f_2)(\lambda\theta) = \lambda^{2g}(f_1(\theta) \cdot f_2(\theta))$, $f^r(\lambda\theta) = \lambda^{gr} f^r(\theta)$.

Bemerkung 3. Ist $f: \mathbb{R}^p \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$ homogene Funktion vom Grad $g \in \mathbb{R}$, und sind f_1 und f_2 der Real- und Imaginärteil von f, d.h. $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$ mit $f_i: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, so sind f_i reellwertige Funktionen vom Grad g.

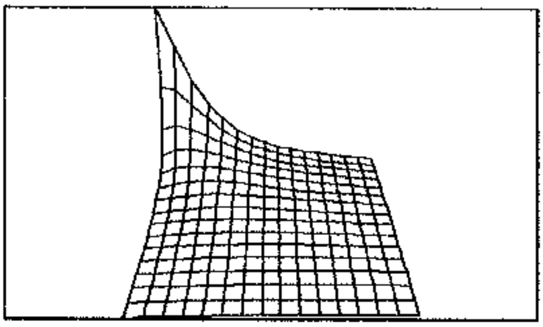
Lemma 4. Seien $k, g \in \mathbb{N}$. Ist $f: \mathbb{R}^p \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$ eine homogene C^k-Funktion vom Grad g, so gilt für $r \in \mathbb{N}$, $r < k$, und $\theta \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$

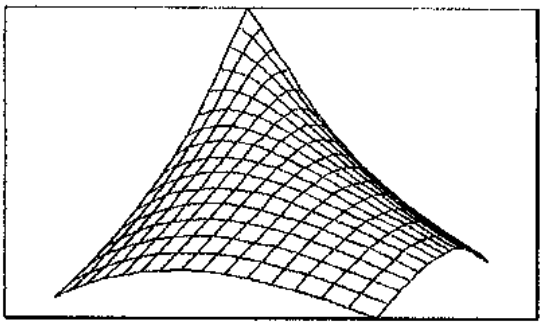
$$\sum_{|\alpha| = r} \frac{D_\theta^\alpha f(\theta) \theta^\alpha}{\alpha!} = \binom{g}{r} f(\theta), \tag{2}$$

und es existiert ein $t \in [0, 1]$, so daß

$$\sum_{|\alpha| = k} \frac{D_\theta^\alpha f((1 + t\lambda)\theta)\, \theta^\alpha}{\alpha!} = \binom{g}{k} f(\theta)$$

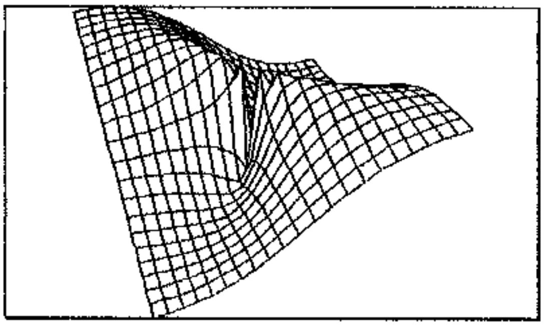
Beachte hierbei, daß $\binom{g}{r} = 0$ für $r > g$.

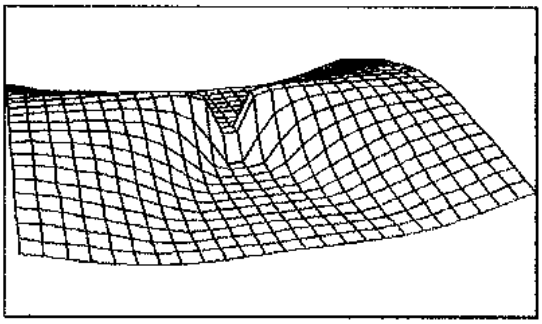




$g=-2$: $f(\theta_1,\theta_2)=\dfrac{\theta_1}{\theta_1^3+\theta_2^3}$, $\theta_i>0$

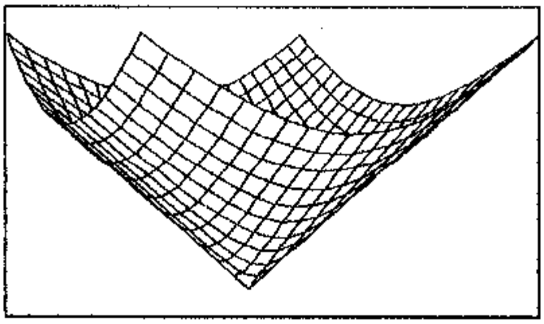
$g=-1$: $f(\theta_1,\theta_2)=\dfrac{\theta_1\theta_2}{\theta_1^3+\theta_2^3}$, $\theta_i>0$

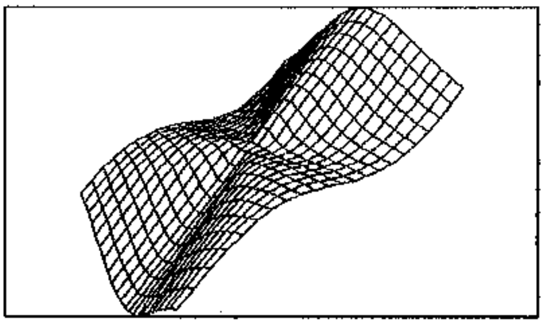




$g=0$: $f(\theta_1,\theta_2)=\dfrac{\theta_1\theta_2}{\theta_1^2+\theta_2^2}$

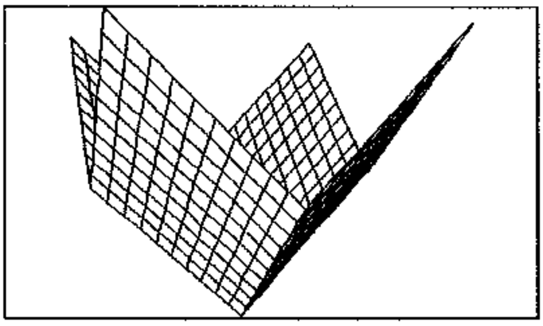
$g=0$: $f(\theta_1,\theta_2)=\exp\left(-\dfrac{\theta_1^2}{\theta_2^2}\right)$

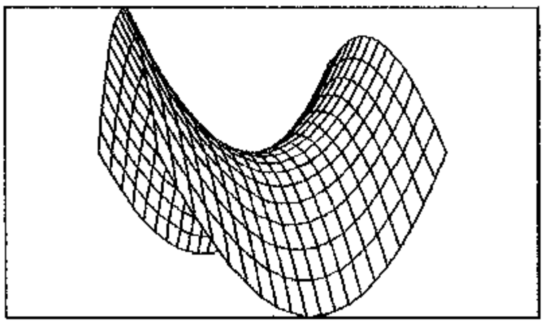




$g=1$: $f(\theta_1,\theta_2)=\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}$ **(Kegel)**

$g=1$: $f(\theta_1,\theta_2)=\dfrac{\theta_1^3}{\theta_1^2+\theta_2^2}$





$g=1$: $f(\theta_1,\theta_2)=|\theta_1|+|\theta_2|$

$g=2$: $f(\theta_1,\theta_2)=\theta_1^2-\theta_2^2$

Fig. 1. Graphen verschiedener homogener Funktionen. Beachte, daß die Graphen für $g=0$ am Ursprung (0, 0) nur näherungsweise berechnet sind: Die Funktionen sind dort nicht stetig.

Beweis. Aus der Homogenität folgt direkt $f((1+\lambda)\theta)=(1+\lambda)^g f(\theta) \quad \forall \lambda > -1$. Weiter $\exists\, 0<\varepsilon<1$, so daß $\forall \lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Funktion $\theta \mapsto f((1+\lambda)\theta)$ in eine Taylor-Reihe um θ entwickelt werden kann, d.h. $\exists\, t \in [0,1]$, so daß, wegen $(1+\lambda)\theta-\theta=\lambda\theta$,

$$f((1+\lambda)\theta)=f(\theta)+\sum_{|\alpha|<k}\frac{1}{\alpha!}D_\theta^\alpha f(\theta)\theta^\alpha\lambda^{|\alpha|}+\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}D_\theta^\alpha f((1+t\lambda)\theta)\theta^\alpha\lambda^k. \tag{3}$$

Für alle $\lambda \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ muß diese Entwicklung aber gleich $(1+\lambda)^g f(\theta)$ sein, d.h. mit der binomischen Formel $\sum_{i=0}^g \binom{g}{i}\lambda^i f(\theta)=f((1+\lambda)\theta)$. Durch Koeffizientenvergleich nach den Potenzen von λ liefert dies mit (3) die Behauptung.

□

Der folgende Satz ist für $g\in\mathbb{N}$ lediglich ein Korollar aus Lemma 4, er läßt sich jedoch allgemeiner für $g\in\mathbb{R}$ formulieren:

Satz 5 (Satz von Euler). Sei $f:\mathbb{R}^p\backslash\{0\}\to\mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare homogene Funktion vom Grad $g\in\mathbb{R}$, und bezeichne $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ das gewöhnliche Skalarprodukt. Dann gilt für $\theta\in\mathbb{R}^p\backslash\{0\}$

$$\langle \operatorname{grad} f(\theta),\theta\rangle = g f(\theta). \tag{4}$$

Ferner ist jede der p Komponenten von $\operatorname{grad} f$, $\partial f/\partial\theta_\nu:\mathbb{R}^p\backslash\{0\}\to\mathbb{C}$, $\nu=1,\dots,p$, eine homogene Funktion vom Grad $g-1$.

Beweis. Sei $\theta\in\mathbb{R}^p\backslash\{0\}$. Dann ist $\psi=\psi_\theta:(0,\infty)\to\mathbb{C}$, $\psi(\lambda):=f(\lambda\theta)$ stetig differenzierbar. Einerseits gilt $\forall\lambda>0$ nach der Kettenregel $\psi'(\lambda)=\langle\operatorname{grad} f(\lambda\theta),\theta\rangle$, andererseits, wegen der Homogenität von f, $\psi(\lambda)=\lambda^g f(\theta)$, d.h. $\psi'(\lambda)=g\lambda^{g-1}f(\theta)$. Speziell für $\lambda=1$ ist also $\langle\operatorname{grad} f(\theta),\theta\rangle=\psi'(1)=gf(\theta)$, d.h. es gilt (4). Damit folgt jedoch $\forall\theta\in\mathbb{R}^p\backslash\{0\}$

$$gf(\lambda\theta)=\langle\operatorname{grad} f(\lambda\theta),\lambda\theta\rangle.$$

Für die linke Seite gilt $gf(\lambda\theta)=\lambda^g gf(\theta)$, während die rechte Seite wegen der Linearität des Skalarprodukts $\langle\operatorname{grad} f(\lambda\theta),\lambda\theta\rangle=\lambda\langle\operatorname{grad} f(\lambda\theta),\theta\rangle$ lautet. Dividiert durch $\lambda^g>0$ ergibt sich also

$$gf(\theta)=\langle\lambda^{1-g}\operatorname{grad} f(\lambda\theta),\theta\rangle.$$

Mit (4) folgern wir nach Koeffizientenvergleich $\operatorname{grad} f(\lambda\theta)=\lambda^{g-1}\operatorname{grad} f(\theta)$. □

Folgerung 6. Sei $f:\mathbb{R}^p\backslash\{0\}\to\mathbb{C}$ homogene C^k-Funktion vom Grad $g\in\mathbb{R}$, $k\geqq 1$. Mit dem Satz von Euler ist dann $\partial f/\partial\theta_\nu$ für $\nu=1,\dots,p$ homogen vom Grad $g-1$. Mit Bemerkung 2 folgt weiter, daß die Funktion $V:\mathbb{R}^p\backslash\{0\}\to\mathbb{C}$,

$$V(\theta)=|\mathrm{Re}\ \operatorname{grad} f(\theta)|=\sqrt{\sum_\nu(\mathrm{Re}\ \partial f/\partial\theta_\nu)^2}, \tag{5}$$

eine homogene $(k-1)$-fach differenzierbare homogene Funktion vom Grad $g-1$ ist.

Folgerung 7. Ist f eine nirgends verschwindende homogene C^1-Funktion vom Grad $g\in\mathbb{R}$, $g\neq 0$. Dann hat f keine kritischen Punkte, d.h. $\operatorname{grad} f(\theta)\neq 0\ \forall\,\theta\in\mathbb{R}^p\backslash\{0\}$. Denn wäre $\operatorname{grad} f(\theta)=0$ für ein θ, so gälte mit dem Satz von Euler $gf(\theta)=0$.

Folgerung 8. Ist f homogene C^1-Funktion vom Grad $g\in\mathbb{R}$, und ist $\theta_0\in\mathbb{R}^p\backslash\{0\}$ ein kritischer Punkt, so sind alle Punkte der Halbgeraden $\{\lambda\theta_0 \mid \lambda>0\}$ ebenfalls kritische Punkte. Mit dem Satz von Euler ist nämlich $\partial f/\partial\theta_\nu$, $\nu=1,\ldots,p$, homogen vom Grad $g-1$, d.h. $\forall\lambda>0$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial\theta_\nu}(\lambda\theta_0)=\lambda^{g-1}\frac{\partial f}{\partial\theta_\nu}(\theta_0)=0.$$

Sei $S^{p-1}=\{\theta\in\mathbb{R}^p \mid |\theta|^2=\sum\theta_i^2=1\}$ wie üblich die Einheitssphäre des $\mathbb{R}^p$.

Satz 9. Sei $p\in\mathbb{N}$ ungerade, und sei $f\colon\mathbb{R}^p\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ eine homogene differenzierbare Funktion vom Grad $g\in\mathbb{R}$. Seien weiter $f_1:=\operatorname{Re}f$ und $f_2:=\operatorname{Im}f$ der Real- und Imaginärteil von f, d.h. $f=f_1+if_2$ mit $f_i\colon\mathbb{R}^p\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $i=1,2$. Dann existiert für $i=1,2$ jeweils ein Richtungsvektor $\theta_{(i)}\in\mathbb{R}^p$, so daß alle Punkte auf der Halbgeraden $\{\lambda\theta_{(i)}\mid\lambda>0\}$ kritische Punkte von f_i sind, d.h.

$$\operatorname{grad}f_i(\lambda\theta_{(i)})=0 \qquad \forall\lambda>0.$$

Beweis. Sei $\tilde{f}_i\colon S^{p-1}\to\mathbb{R}$ die Einschränkung von f_i auf die Einheitssphäre, d.h. $\tilde{f}_i(\theta)=f_i(\theta)$ für $\theta\in S^{p-1}$. Dann ist $\operatorname{grad}\tilde{f}_i\colon S^{p-1}\to\mathbb{R}^p$ ein tangentiales Vektorfeld von S^{p-1},

$$(\theta,\operatorname{grad}\tilde{f}_i(\theta))\in TS^{p-1}$$

$\forall\theta\in S^{p-1}$, wobei TS^{p-1} das Tangentialbündel von S^{p-1} bezeichnet. Da p ungerade ist, folgt mit dem »Satz vom Igel«, daß $\operatorname{grad}\tilde{f}_i$ für ein $\theta_{(i)}\in S^{p-1}$ verschwindet,

$$\operatorname{grad}\tilde{f}_i(\theta_{(i)})=0.$$

Da f_i nach Bemerkung 2 homogen vom Grad g und damit die Komponenten $\partial f_i/\partial\theta_\nu$, $\nu=1,\ldots,p$, nach dem Satz von Euler homogen vom Grad $g-1$ sind, gilt $\operatorname{grad}f_i(\lambda\theta_{(i)})=\lambda^{g-1}\operatorname{grad}f_i(\theta_{(i)})=\lambda^{g-1}\operatorname{grad}\tilde{f}_i(\theta_{(i)})=0\ \forall\lambda>0$. □

Folgerung 10. Ist $f\colon\mathbb{R}^p\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ eine homogene differenzierbare Funktion vom Grad $g\in\mathbb{R}$, $g\neq0$, und ist p ungerade, so verschwinden notwendig Real- und Imaginärteil von f in je einem Punkt, d.h. $\exists\ \theta_{(1)},\theta_{(2)}\in\mathbb{R}^p\setminus\{0\}$ mit $f_i(\theta_{(i)})=0$, wobei $f_1=\operatorname{Re}f$ und $f_2=\operatorname{Im}f$. Denn verschwände f_i nirgends, so wäre nach Folgerung 7 $\operatorname{grad}f_i(\theta)\neq0\ \forall\theta\in\mathbb{R}^p\setminus\{0\}$. Dies ist jedoch im Widerspruch zu Satz 9.

Folgerung 11. Sei $p\in\mathbb{N}$ ungerade und $f=f_1+if_2\colon\mathbb{R}^p\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ homogene C^1-Funktion vom Grad $g\in\mathbb{R}$. Seien weiter, für $i=1,2$, $\theta_{(i)}\in S^{p-1}$ die beiden Richtungsvektoren mit $\operatorname{grad}f_i(\lambda\theta_{(i)})=0$ aus Satz 9. Ist dann zusätzlich für $i=1,2$ die Hesse-Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial\theta_\mu\partial\theta_\nu}(\theta_{(i)})\right)_{\mu,\nu=1,\ldots,p}$$

negativ definit, so sind (wegen der $(g-1)$-Homogenität von $\partial^2 f_i/\partial\theta_\mu\partial\theta_\nu$) alle Punkte $\lambda\theta_{(i)}$, $\lambda>0$, lokale Maxima von f_i.

2. Phasenfunktionen und Gruppengeschwindigkeit

Definition 12. Sei $V^+ = \Omega \times \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir nennen eine Funktion $\varphi \in C^\infty(V^+, \mathbb{C})$ *Phasenfunktion* in V^+, wenn

(i) $\varphi(x, \lambda\theta) = \lambda\varphi(x, \theta)$ für $(x, \theta) \in V^+$, $\lambda > 0$;
(ii) $\operatorname{Im}\varphi \geqq 0$ in V^+;
(iii) $d\varphi \neq 0$ in V^+.

Seien $m, \rho, \delta \in \mathbb{R}$, $0 < \rho \leqq 1$, $0 \leqq \delta < 1$. Dann ist $\operatorname{Sym}(m, \rho, \delta)$ die Menge der *Symbole* der Ordnung m vom Typ ρ, δ, d.h. aller Funktionen $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{n-1})$, für die eine Konstante $C_{\alpha,\beta,K}$ $\forall K \subset \Omega$ kompakt und $\forall$ Multiindizes α, β existiert, so daß

$$\left| D_x^\beta D_\theta^\alpha a(x, \theta) \right| \leqq C_{\alpha,\beta,K} (1 + |\theta|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \tag{6}$$

vgl. Hörmander (1983) [I, p. 236]. Eine Funktion $a \colon \Omega \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{C}$ heißt *asymptotisches Symbol* der Ordnung m auf $V^+ = \Omega \times \mathbb{R}^{n-1}$, wenn $a = a_1 + a_2$ gilt, wobei (i) $a_1 \in \operatorname{Sym}(m, \rho, \delta)$, (ii) a_2 kompakten Träger in den θ-Variablen hat und (iii) die Abbildung $\Omega \to L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $x \mapsto a_2(x, \cdot)$ eine C^∞-Funktion ist.

Ist a ein asymptotisches Symbol und φ eine Phasenfunktion, so ist der formale Ausdruck

$$u(x) = \int_{\theta \in \mathbb{R}^{n-1}} a(x, \theta)\, e^{i\varphi(x,\theta)}\, d\theta, \tag{7}$$

eine Distribution auf Ω, Reed & Simon (1975) [pp. 100]. Sie heißt *oszillatorisches Integral*. Weiter sei für eine Phasenfunktion φ

$$C(\varphi) = \left\{ (x, \theta) \in \Omega \times \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\} \mid \operatorname{grad}_\theta \varphi(x, \theta) = 0 \right\} \tag{8}$$

die Menge der kritischen Punkte von φ bezüglich θ. Ist $\det\left(\partial^2\varphi / \partial\theta_\mu \partial\theta_\nu\right)_{\mu,\nu} \neq 0$, so ist $C(\varphi)$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit der in $\mathbb{R}^{2n-1}$ offenen Menge $\Omega \times \mathbb{R}^{n-1}$. Mit Gleichung (4) ist $\varphi|_{C(\varphi)} = 0$. Ferner ist für gerades n und reelles φ mit Satz 9 stets $C(\varphi) \neq \emptyset$. Sei schließlich

$$SP(\varphi) = \left\{ \left(x, \operatorname{grad}_x \varphi(x, \theta)\right) \mid (x, \theta) \in C(\varphi) \right\},$$

die *Mannigfaltigkeit der stationären Phase* von φ. Es gilt $SP(\varphi) \subset \Omega \times \mathbb{C}^n$. Die Wellenfrontenmenge des oszillatorischen Integrals (für ein beliebiges asymptotisches Symbol) ist Teilmenge von $SP(\varphi)$. Ferner gilt: Hat a kompakten Träger bezüglich θ, so ist u eine C^∞-Funktion. Vgl. Reed & Simon (1975) [pp. 102].

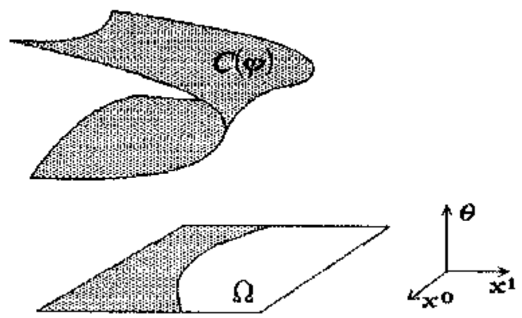


Fig. 2. Die Mannigfaltigkeit $C(\varphi)$ der kritischen Punkte der Phasenfunktion φ.

In der Wellenoptik wird die Intensität einer Lichtwelle beschrieben durch ein oszillatorisches Integral der Form

$$u(\tau, x) = \int_{\theta \in \mathbb{R}^n} a(\tau, x, \theta)\, e^{i\tau\varphi(x,\theta)}\, d\theta, \tag{9}$$

wobei $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}$. Für $\tau \to \infty$ kann man zeigen, daß für ein festes $x \in \Omega$

$$u(x) \approx \sum_{\substack{\theta \text{ mit} \\ (x,\theta) \in C(\varphi)}} a\, e^{i\tau\varphi(x,\theta)}$$

(Für $n=1$ sieht man dies sehr leicht: Ist $\varphi' = \partial\varphi/\partial\theta \neq 0$, so ist mit partieller Integration $u = \int_{\mathbb{R}} a e^{i\tau\varphi} d\theta = [a e^{i\tau\varphi}/i\tau\varphi']_{-\infty}^{+\infty} - (1/i\tau)\int e^{i\tau\varphi}(a/\varphi')' d\theta \to 0$ für $\tau\to\infty$). Diese Näherung heißt *Methode der stationären Phase* oder *Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) Methode*. Die Projektion der Menge $C(\varphi) \subset \mathbb{R}^{2n}$ auf $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ergibt die *Illuminationszone*, diejenigen Punkte x, in denen für große Zeiten τ noch Licht zu sehen ist (der graue Bereich in Fig. 2). Der Rand dieser beleuchteten Zone heißt *Kaustik*, vgl. Poston & Stewart (1978).

Konvention 13. Sei $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x = (x^0, \ldots, x^{n-1})$. Dann bezeichnen wir, wie in der Physik gebräuchlich, den Vektor $\mathbf{x} := (x^1, \ldots, x^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, d.h. es gilt $x = (x^0, \mathbf{x})$.

Beispiel 14. (Reed & Simon, 1975 [pp. 100]). Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$, und

$$\Delta_+(x; m) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int_{\theta \in \mathbb{R}^{n-1}} a(x, \theta; m)\, e^{i\varphi(x,\theta)}\, d\theta, \tag{9}$$

mit

$$\varphi(x, \theta) = -x^0|\theta| + \mathbf{x}\cdot\theta, \tag{10}$$

$$a(x, \theta; m) = (m^2 + |\theta|^2)^{-1/2} \exp\Big(-ix^0\Big(\sqrt{m^2+|\theta|^2} - |\theta|\Big)\Big). \tag{11}$$

Dann ist φ eine Phasenfunktion, denn $\partial\varphi/\partial x^0 = |\theta| \neq 0$ für $(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\})$. Die Funktion a ist nicht C^∞, da $|\theta|$ nicht differenzierbar ist bei $\theta = 0$, aber mit der Abschätzung $\big|\sqrt{m^2+\theta\cdot\theta} - |\theta|\big| \leqq K(|\theta|+1)^{-1}$ kann man zeigen, daß a ein asymptotisches Symbol der Ordnung -1 ist. Damit ist Δ_+ ein oszillatorisches Integral. Es wird gebraucht bei der Berechnung der 2-Punkte Wightman Distribution, s. Reed & Simon (1975) [pp. 70].

Da $\operatorname{grad}_\theta \varphi = -x^0\theta|\theta|^{-1} + \mathbf{x}$, ist die Menge der kritischen Punkte $C(\varphi) = C_1 \cup C_2$ mit

$$C_1 = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^{2n-1} \mid x = 0, \theta \neq 0\}, \tag{12}$$

$$C_2 = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^{2n-1} \mid |x^0| = |\mathbf{x}| \neq 0,\ \theta = \lambda\mathbf{x}/x^0,\ \lambda > 0\}. \tag{13}$$

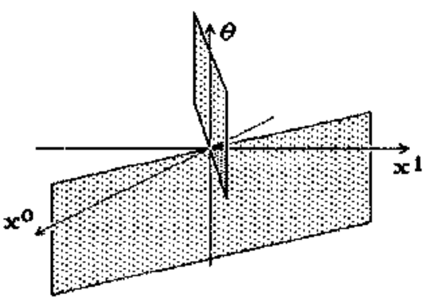


Fig. 3. $C(\varphi)$ für die Phasenfunktion (10) für $n=2$. C_1 ist hier die θ-Achse ohne den Ursprung, und C_2 besteht aus vier offenen Ebenenstücken.

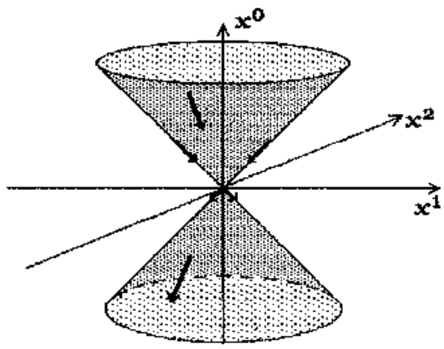


Fig. 4. Die Menge der stationären Phase der Phasenfunktion (10) für $n=3$.

Es gilt $C_1 \cong \mathbb{R}^{n-1}$, $C_2 \cong (0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Wegen $\operatorname{grad}_x(x, \theta) = (-|\theta|, \theta) \in \mathbb{R}^n$, folgt

$$SP(\varphi) = \{(0, -|\theta|, \theta) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \theta \neq 0\} \cup \{(\pm|\mathbf{x}|, \mathbf{x}, -\lambda|\mathbf{x}|, \mp\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}, \lambda > 0\}. \tag{14}$$

Damit ist die Projektion von $C(\varphi)$ auf Ω, $\{x \mid \operatorname{grad}_\theta \varphi(x, \theta) = 0\}$ der *Lichtkegel*

$\{x|\, x = \pm|\mathbf{x}|\}$, und $SP(\varphi)$ ist die Familie der lichtartigen Tangentialvektoren des Lichtkegels mit negativer Zeitkomponente, s. Fig. 4. Ist $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so ist die Mannigfaltigkeit der stationären Phase Untermannigfaltigkeit des Tangentialbündels des Lichtkegels Λ ohne $x=0$, $SP(\varphi) \subset T\Lambda$.

Definition 15. Sei $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$, mit der Indexnumerierung $x = (x^0, x^1, \ldots, x^{n-1})$, und sei $\varphi \colon \Omega \times \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine Phasenfunktion. Dann seien $k_j \colon \Omega \times \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ für $j = 0, 1, 2, 3$ die Ableitungen nach x^j (mit der Bezeichnung $\partial_j := \partial / \partial x^j$),

$$k_0(x, \theta) := -\partial_0 \varphi(x, \theta), \qquad k_\nu := \partial_\nu \varphi(x, \theta) \quad (\nu = 1, \ldots, n-1), \tag{15}$$

d.h. $k_j = (-1)^{1+\operatorname{sgn} j}\, \partial_j \varphi$.

Die Homogenität von φ vererbt sich auf die Funktionen k_j, d.h. die k_j sind bezüglich θ homogen vom Grad 1. Damit ist jedoch

$$k_j(x, \theta) = \langle \operatorname{grad}_\theta k_j(x, \theta), \theta \rangle, \tag{16}$$

und für jedes $\nu = 1, \ldots, n-1$ ist die C^∞-Funktion $\partial k_j / \partial \theta_\nu$ homogen vom Grad 0. Analog zu Konvention 13 sei $k = (k_0, \ldots, k_{n-1}) = (k_0, \boldsymbol{k})$.

Mit dem Satz von Euler bzw. Gleichung (2) aus Lemma 4 mit $r = g = 1$ folgt

$$k_0 = \langle \boldsymbol{v}, \theta \rangle \tag{17}$$

wobei

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}_\theta k_0. \tag{18}$$

Die Komponenten von $\boldsymbol{v}$, $v_\nu = \partial k_0(x, \theta) / \partial \theta_\nu$, sind bezüglich θ homogen vom Grad 0. Aus Gleichung (2) folgt daher, mit $r = 1$, $g = 0$, $\operatorname{grad}_\theta v_\nu \perp \theta$. Insbesondere ist die Hesse-Matrix von k_0, $\operatorname{Hess} k_0 = (\partial^2 k_0 / \partial \theta_\mu \partial \theta_\nu)$, für alle $x \in \Omega$ singulär, denn mit $\operatorname{Hess} k_0 \cdot \theta = 0$ $\forall \theta \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist 0 ein Eigenwert.

Ferner folgt bei festem θ für die Taylor-Entwicklung um $y = (y^0, \ldots, y^{n-1}) \in \Omega$

$$\varphi(x, \theta) = \varphi(y, \theta) - \langle \boldsymbol{v}, \theta \rangle (x^0 - y^0) + \langle \boldsymbol{k}, (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \rangle + r(x, y), \tag{19}$$

wobei $|r(x, y)| \leqq K |x - y|^2$ für eine Konstante $K = K(y, \theta) \geqq 0$, und

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}(y, \theta) = \operatorname{grad}_{\boldsymbol{x}} \varphi(y, \theta). \tag{20}$$

Satz 16. Für eine Phasenfunktion gilt

$$\boldsymbol{k}(x, \theta) = A \cdot \theta, \qquad \text{und damit} \qquad \operatorname{grad}_{\boldsymbol{k}} \varphi = A \cdot \operatorname{grad}_\theta \varphi, \tag{21}$$

wobei A die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix mit der α-ten Zeile $\operatorname{grad}_\theta k_\alpha = \operatorname{grad}_\theta \partial_\alpha \varphi$ ist,

$$A = A(x, \theta) = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\alpha \partial \theta_\nu} (x, \theta) \right)_{\alpha, \nu = 1, \ldots, n-1}. \tag{22}$$

Ist $\det A \neq 0$, so heißt φ *nicht entartet*, vgl. Hörmander (1983), [III, p. 292].

Satz 17. Ist φ eine nichtentartete Phasenfunktion, so gilt

$$\mathrm{grad}_{\boldsymbol{k}} k_0 = A^{-1}\mathbf{v}. \tag{23}$$

Definition 18. Beschreibt das oszillatorische Integral eine Welle, so ist $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{k}} k_0$ das *Vektorfeld der Gruppengeschwindigkeit (group velocity)*, und

$$c_g = |\mathrm{grad}_{\boldsymbol{k}} k_0| \tag{24}$$

ist die *Gruppengeschwindigkeit.*

3. Wellen in Raumzeiten

Sei $(\mathcal{M}, \boldsymbol{g})$ eine Raumzeit, s. Hawking & Ellis, und sei $\Box = g^{ij}\nabla_i\nabla_j$ der d'Alembert-Operator der Raumzeit. Wir beschränken uns im folgenden auf Karten $(\Omega, \widetilde{\varphi})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ offen, in der der metrische Tensor die Bedingung

$$g^{00}(x) > 0 \qquad \forall x \in \widetilde{\varphi}^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{M} \tag{25}$$

erfüllt. Nach de Vries (1995) ist dies ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Raumartigkeit der Hyperflächen $x^0 = \mathrm{const}$, d.h. $\big(g_{\alpha\beta}(x)\big)_{\alpha\beta=1,2,3}$ ist negativ definit $\forall\, x \in \widetilde{\varphi}^{-1}(\Omega)$. Damit ist $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}$ eine Riemannsche Metrik der Hyperflächen $x^0 = \mathrm{const}$, mit den kontravarianten Komponenten

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} + \frac{g^{0\alpha}g^{0\beta}}{g^{00}}, \tag{26}$$

vgl. de Vries (1994) [p. 22]. Sei im folgenden ψ eine Phasenfunktion.

Definition 19. Sei das oszillatorische Integral

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} a(x,\theta)\, e^{i\psi(x,\theta)}\, d\theta \tag{27}$$

eine Lösung der masselosen Klein-Gordon-Gleichung $\Box u = 0$, d.h. ein masseloses freies skalares Feld, mit dem *Eikonal* $\psi\colon \Omega \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ und dem asymptotischen Symbol a. Für $\mathrm{grad}_x \varphi \neq 0$ heißen die Hyperflächen $\varphi = \mathrm{const}$ *Wellenflächen.*

Wir wollen uns mit den Eigenschaften des Eikonals, d. h. mit der Ausbreitung der Wellenflächen, beschäftigen. Die Gleichung der Charakteristiken des d'Alembert-Operators $\Box$ lautet

$$g^{ij}\,\partial_i\psi\,\partial_j\psi = 0 \tag{28}$$

vgl. Choquet-Bruhat *et al.* (1982) [p. 535 ff]. Dies ist die *Eikonal-* oder *Dispersionsgleichung für lichtartige Spinorfelder in der Allgemeinen Relativität.*

Definition 20. Der Gradient des Eikonals,

$$k_i = \partial_i \psi = \psi_{,i} \tag{29}$$

($i = 0, 1, 2, 3$) bildet den *Wellenzahlvektor* $k_i = (k_0, \mathbf{k})$ (vgl. die Definition in Misner, Thorne und Wheeler, 1973, oder Stephani, 1991). Die Zeitkoordinate k_0 hängt mit der *Frequenz* ω der Welle in der Koordinatenzeit $x^0 = ct$ durch $k_0 = \omega/c$ zusammen, und die räumlichen Koordinaten (k_1, k_2, k_3) stellen die (lokalen) Ausbreitungsrichtungen der Wellenflächen dar. Mit der Funktion $F: U \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$F(x^i, \psi, k_i) = g^{ij} k_i k_j \tag{30}$$

lautet die Eikonalgleichung damit $F(x^i, \psi, k_i) = 0$.

Bemerkung 21. Mit der Eikonalgleichung ist der Wellenzahlvektor lichtartig,

$$k^i k_i = 0.$$

Da für die »verallgemeinerte Rotation« eines Vektorfeldes $X_{i;j} - X_{j;i} = X_{i,j} - X_{j,i}$ gilt, ist $\psi_{,i;j} = \psi_{,j;i}$. Damit liefert die kovariante Differentiation obiger Gleichung

$$k^i k_{i;j} = \psi^{,i} \psi_{,i;j} = \psi^{,i} \psi_{,j;i} = k^i k_{j;i} = 0.$$

Diese Gleichung besagt, daß k_i Vektorfeld einer Geodäten ist, d. h. die Kurven $x^i(\tau)$, deren Tangentenvektoren k^i sind, $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\tau = k^i$, sind Geodäten, wegen $k^i k_i = 0$ also Nullgeodäten.

Gehen wir den etwas unkonventionellen Weg und betrachtet ein oszillatorisches Integral der Form (27), jedoch mit einer in x konstanten Funktion $a = a(\theta)$, dafür aber mit einer *komplexen* Phasenfunktion $\psi: U \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$, so gilt folgendes Lemma:

Lemma 22. Das oszillatorische Integral

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} a(\theta) e^{i\psi(x,\theta)} \, \mathrm{d}\theta \tag{31}$$

ist genau dann eine Lösung der masselosen Klein-Gordon-Gleichung $\Box u = 0$, d.h. ein masseloses freies Skalarfeld, wenn der komplexe Wellenzahlvektor $\partial_j \psi = k_j + i\varkappa_j$, $k_j, \varkappa_j \in \mathbb{R}$, den beiden reellen Gleichungen

$$k^j{}_{;j} = 2 k^j \varkappa_j, \qquad \text{und} \qquad \varkappa^j{}_{;j} = \varkappa^j \varkappa_j - k^j k_j, \tag{32}$$

genügt.

Beweis. Aus $\nabla_j u = \partial_j u = i u \partial_j \psi$ folgt sofort $\Box u = -u \partial^j \psi \partial_j \psi + i u \nabla_j \partial^j \psi$, also $\Box u = 0 \Leftrightarrow i \nabla_j \partial^j \psi = \partial^j \psi \partial_j \psi \Leftrightarrow i k^j{}_{;j} - \varkappa^j{}_{;j} = k^j k_j - \varkappa^j \varkappa_j + 2 i k^j \varkappa_j$. Der Imaginärteil dieser Gleichung ist genau die erste Gleichung in (32), der Realteil die zweite. $\Box$

Wir nennen die zweite der Gleichungen (32) in Anlehnung an (28) die *verallgemeinerte Dispersionsgleichung in der Allgemeinen Relativität*. Sie ist eine quasilineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Phasenfunktion ψ. Sie gilt exakt. Erst durch die Näherung $\varkappa_j = 0$ erhält man die (nur näherungsweise gültige) Eikonalgleichung (28) der geometrischen Optik. Die Gleichungen (32) besagen in anderen Worten, daß die kovariante Divergenz des Realteils k_j des Wellenzahlvektors $\partial_j \psi$ gleich dem Doppelten des Lorentz-Produkts von Real- und

Imaginärteil ist, und daß die Divergenz die Differenz der Beträge (bezüglich des Lorentz-Produkts) von Imaginär- und Realteil ist. Wir bemerken noch, daß ein reeller Wellenzahlvektor, d. h. $\varkappa_j = 0$, notwendig lichtartig und divergenzfrei ist.

Schreiben wir nur kurz $k_j = \partial_j \psi$ für den komplexen Wellenzahlvektor, so sind die reellen Gleichungen (32) entsprechend mit $\operatorname{Re} k_j$ statt k_j und $\operatorname{Im} k_j$ statt $\varkappa_j$ zu lesen, d. h. als die eine komplexe Gleichung

$$k^j k_j = \mathrm{i} k^j{}_{;j}.$$

Im folgenden sei für jeden Punkt $x \in \mathcal{M}$ die reelle Zahl $K = K(x)$ nach (32) gegeben durch

$$k^j k_j = \varkappa^j \varkappa_j - \varkappa^j{}_{;j} =: K \tag{32'}$$

Mit dem Realteil k_j des Wellenzahlvektors lassen sich die verschiedenen allgemein-relativistischen Wellengeschwindigkeiten einführen, vgl. z. B. Morse & Ingard (1968), [p. 477-79] oder Schmutzer (1989) [pp. 493, pp. 704]:

Definition 23. Sei u ein Skalarfeld u mit dem Realteil k_i des komplexen Wellenzahlvektors. Sei weiter die positive Zahl k gegeben durch

$$k = \sqrt{\gamma^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta}\,. \tag{33}$$

Sei damit $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3) := \boldsymbol{k}/k$ der Einheitsvektor in $\boldsymbol{k}$-Richtung, also

$$n_\alpha = \frac{k_\alpha}{k}. \tag{34}$$

Mit $n^\alpha := \gamma^{\alpha\beta} n_\beta$ folgt $n^\alpha n_\alpha = \gamma^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = 1$. Die *Phasengeschwindigkeit* der Welle ist durch

$$c_{ph} = c\,\frac{k_0}{k} = \frac{\omega}{k} \tag{35}$$

definiert, und der 3-Vektor der *Gruppengeschwindigkeit* durch $\boldsymbol{c}_g := c\,\mathrm{grad}_{\boldsymbol{k}}\, k_0$

$$(c_g)^\alpha = c\,\frac{\partial k_0}{\partial k_\alpha}. \tag{36}$$

Der Betrag der Gruppengeschwindigkeit ist $c_g = \sqrt{\gamma_{\alpha\beta} (c_g)^\alpha (c_g)^\beta}$. Vgl. (18) und (24).

Satz 24. In jeder Karte einer Raumzeit mit $g^{00} > 0$ gilt mit $K \in \mathbb{R}$ aus (32')

$$c_{ph} = \frac{c k_0}{\sqrt{g^{00}\left(k_0 + \frac{g^{0\alpha}}{g^{00}} k_\alpha\right)^2 - K}} \tag{37}$$

Beweis. Wegen $k^i k_i = g^{00} k_0^2 + 2 g^{0\alpha} k_0 k_\alpha + g^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = K$ folgt

$$g^{00}\left(k_0 + \frac{g^{0\alpha}}{g^{00}} k_\alpha\right)^2 - \frac{(g^{0\alpha} k_\alpha)^2}{g^{00}} + \frac{g^{0\alpha} g^{0\beta}}{g^{00}} k_\alpha k_\beta = -g^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta + \frac{g^{0\alpha} g^{0\beta}}{g^{00}} k_\alpha k_\beta + K$$

Mit

$$(g^{0\alpha} k_\alpha)^2 = (g^{0\alpha} k_\alpha)(g^{0\alpha} k_\alpha) = (g^{0\alpha} k_\alpha)(g^{0\beta} k_\beta) = g^{0\alpha} g^{0\beta} k_\alpha k_\beta$$

gilt also

$$g^{00}\Big(k_0+\frac{g^{0\alpha}}{g^{00}}k_\alpha\Big)^2=k^2+K, \tag{38}$$

d. h.

$$k=\sqrt{g^{00}\Big(k_0+\frac{g^{0\alpha}}{g^{00}}k_\alpha\Big)^2-K}$$

□

Damit ist c_{ph} im allgemeinen abhängig von dem Wellenzahlvektor k_i. Ist jedoch $g^{0\alpha}=0\ \forall\,\alpha=1,2,3$ und $K=0$, so gilt $c_{ph}=c/\sqrt{g^{00}}=c\sqrt{g_{00}}$.

Satz 25. Für die Gruppengeschwindigkeit in einer Karte mit $g^{00}>0$ gilt

$$\frac{\partial k_0}{\partial k_\alpha}=\pm\frac{1}{\sqrt{g^{00}}}\frac{\partial}{\partial k_\alpha}\sqrt{k^2+K}-\frac{g^{0\alpha}}{g^{00}}. \tag{39}$$

Speziell für $K=0$ ist

$$\frac{\partial k_0}{\partial k_\alpha}=\pm\frac{n^\alpha}{\sqrt{g^{00}}}-\frac{g^{0\alpha}}{g^{00}},\qquad c_g{}^2=\frac{c^2}{g^{00}}\Big(1+g_{0\alpha}g^{0\alpha}\mp\frac{2\,n_\alpha g^{0\alpha}}{\sqrt{g^{00}}}\Big). \tag{40}$$

Beweis. Mit (38) gilt $k_0=\pm\sqrt{k^2+K}/\sqrt{g^{00}}-g^{0\alpha}k_\alpha/g^{00}$. Damit folgt (39) sofort. Für $K=0$ bedeutet dies wegen $\partial k/\partial k_\alpha=\gamma^{\alpha\beta}k_\beta/k=n^\alpha$ die erste Gleichung (40). Damit gilt mit $\gamma_{\alpha\beta}n^\beta=n_\alpha$ und $\gamma_{\alpha\beta}=-g_{\alpha\beta}$

$$\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial k_0}{\partial k_\alpha}\frac{\partial k_0}{\partial k_\beta}=\frac{1}{g^{00}}\mp\frac{n_\alpha g^{0\alpha}+n_\beta g^{0\beta}}{(g^{00})^{3/2}}-\frac{g_{\alpha\beta}g^{0\alpha}g^{0\beta}}{(g^{00})^2}.$$

Mit Gleichung (2.2) in de Vries (1994) [p. 21] gilt $g_{\alpha\beta}g^{0\alpha}=-g_{0\beta}g^{00}$, und daher folgt mit $c_g^2=c^2\gamma_{\alpha\beta}\,\partial k_0/\partial k_\alpha\cdot\partial k_0/\partial k_\beta$ die zweite Gleichung (40).

□

Wie aus der geometrischen Optik wohlbekannt, bestimmt die Gruppengeschwindigkeit die lokale Ausbreitungsrichtung der Welle, sie definiert in jedem Punkt die *Strahlen*. Betrachten wir dazu die Hamilton-Funktionen

$$H_\pm(x^i,k_\alpha)=\frac{g^{0\alpha}}{g^{00}}k_\alpha\pm\frac{1}{\sqrt{g^{00}}}k^2. \tag{41}$$

Sei $\widetilde{F}_\pm(x^i,k_i):=k_0+H_\pm(x^i,k_\alpha)$. Die Eikonalgleichung lautet nun $\widetilde{F}_+\widetilde{F}_-=0$, d. h. $\widetilde{F}_+=0$, oder $\widetilde{F}_-=0$. Diese Gleichungen wiederum sind äquivalent zu den *Hamilton-Jacobi-Gleichungen* für das Eikonal ψ,

$$\partial_0\psi-H_\pm(x^i,\partial_\alpha\psi)=0.$$

Das charakteristische System von $\widetilde{F}_\pm$ besteht aus den Gleichungen

$$C=\left[\begin{array}{l}\widetilde{F}_\pm=k_0+H_\pm(x^i,k_\alpha)=0,\\ \theta=\mathrm{d}\psi-k_i\,\mathrm{d}x^i=0,\\ \theta^\alpha=\mathrm{d}x^\alpha-\dfrac{\partial H_\pm}{\partial k_\alpha}\mathrm{d}x^0=0,\\ \theta_i=\mathrm{d}k_i+\dfrac{\partial H_\pm}{\partial x^\alpha}\mathrm{d}x^0=0,\end{array}\right.$$

vgl. Choquet-Bruhat (1982), [pp. 272]. Die beiden letzten Gleichungsgruppen sind die Hamilton-Gleichungen

$$\frac{dx^\alpha}{dx^0} = \frac{\partial H_\pm}{\partial k_\alpha}, \qquad \frac{dk_i}{dx^0} = -\frac{\partial H_\pm}{\partial x^\alpha}. \tag{42}$$

Die erste ist die Gleichung für die Strahlen; mit (36) ist $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{k}} H_\pm = \boldsymbol{c}_g$ für $\widetilde{F}_\pm = 0$.

Anschaulich kann man dies wie folgt begründen: Betrachte eine Welle $u(x)$ in einem festen Punkt $x \in U$. Sie läßt sich durch das oszillatorische Integral (27), ein »Wellenpaket«, darstellen. Der Hauptbeitrag dieses Integrals rührt von den kritischen Punkten von ψ bezüglich θ her, d. h. von $(x,\theta) \in C(\psi)$, also mit (21) $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{k}} \psi(x,\theta) = 0$. Mit der Taylor-Entwicklung (19) und mit (17) ist das jedoch

$$\mathrm{grad}_{\boldsymbol{k}} \psi(x,\theta) \approx -\mathrm{grad}_{\boldsymbol{k}} k_0 \cdot (x^0 - y^0) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = 0,$$

also

$$\mathrm{grad}_{\boldsymbol{k}} k_0 = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}}{x^0 - y^0}. \tag{43}$$

Da ein physikalisches Signal durch ein Wellenpaket dargestellt werden kann, kommt der letzten Gleichung direkter Wert zu, wenn sehr eng um den Vektor θ mit $(x,\theta) \in C(\varphi)$ gruppierte Wellenpakete das betrachtete Signal beschreiben. Damit ist also die Definition der Gruppengeschwindigkeit wegen (39) sinnvollerweise die Geschwindigkeit des Wellenpakets, vgl. Nettel (1992) [p. 179 ff].

Definition 26. Ist die Phasengeschwindigkeit abhängig von $\boldsymbol{k}$, d.h. ist $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{k}} c_{ph} \neq 0$,

$$\frac{\partial c_{ph}}{\partial k_\alpha} \neq 0 \qquad \text{für mindestens ein } \alpha, \tag{44}$$

so *dispergiert* die Welle; die Erscheinung selbst heißt *Dispersion*. Im Falle $\partial c_{ph}/\partial k < 0$ spricht man von *normaler*, im Falle $\partial c_{ph}/\partial k > 0$ von *anormaler Dispersion*.

Bemerkung 27. Die Komponenten des metrischen Tensors sind als Funktionen betrachtet lediglich von den Koordinaten abhängig, nicht jedoch von den Komponenten des Wellenzahlvektors,

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial k_l} = 0. \tag{45}$$

Satz 28. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Dispersion einer Welle ist, daß Gruppen- und Phasengeschwindigkeit verschieden sind, d. h. $c_g \neq c_{ph}$.

Beweis. Mit $k_0 = k\, c_{ph}$ und mit $\partial k/\partial k_\alpha = \gamma^{\alpha\beta} k_\beta / k = n^\alpha$ gilt

$$c_g{}^\alpha = c_{ph}\, n^\alpha + k \frac{\partial c_{ph}}{\partial k_\alpha},$$

also

$$c_g{}^2 = c_{ph}^2\, \gamma_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta + k c_{ph} \gamma_{\alpha\beta} \left(n^\alpha \frac{\partial c_{ph}}{\partial k_\beta} + n^\beta \frac{\partial c_{ph}}{\partial k_\alpha} \right) + k^2\, \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial c_{ph}}{\partial k_\alpha} \frac{\partial c_{ph}}{\partial k_\beta}.$$

Da $\gamma_{\alpha\beta}$ positiv definit ist, sind alle drei Summenterme nicht negativ; der dritte ist sogar genau dann positiv, wenn die Welle dispergiert. Mit $\gamma_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = 1$ folgt die Behauptung.

□

Korollar 29. In einer nicht-statischen Raumzeit dispergieren lichtartige Wellen.

Beweis. Es ist $g^{0\alpha} \neq 0$ für mindestens ein $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, s. Landau & Lifschitz (1992) [p. 295].

□

Betrachtet man die Wellenzahlvektoren k_α als nur von k_0 abhängige Funktionen, $dk_\alpha = \partial k_\alpha / \partial k_0 \, dk_0$, so erhält man mit einer etwas anderen Definition der Gruppengeschwindigkeit folgendes interessante Resultat:

Satz 25′. In jeder Karte mit $g^{00} > 0$ einer Raumzeit ist die Gruppengeschwindigkeit, definiert durch $c_g = c(dk/dk_0)^{-1}$, immer

$$c_g = \frac{c}{\sqrt{g^{00}}}. \tag{40'}$$

Beweis. Zunächst gilt mit (38)

$$\frac{1}{\sqrt{g^{00}}} \frac{dk}{dk_0} = 1 + \frac{g^{0\alpha}}{g^{00}} q_\alpha. \tag{*}$$

mit $q_\alpha = dk_\alpha / dk_0$. Nach Choquet-Bruhat *et al.* (1982) [pp. 250] ist allgemein

$$S := \begin{cases} f := F(x^i, \psi, k_i) = 0 \\ \theta := d\psi - k_i \, dx^i = 0 \end{cases}$$

ein äußeres Differentialsystem (Pfaff-System) mit dem Abschluß

$$\bar{S} = \begin{cases} f = 0, \quad df = \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} + k_i \frac{\partial F}{\partial \psi}\right) dx^i + \frac{\partial F}{\partial k_i} dk_i = 0 \\ \theta = 0, \quad d\theta = -dk_i \wedge dx^i = 0, \end{cases}$$

und dem charakteristischen System (dem assozierten Pfaff-System)

$$C = \begin{cases} \dfrac{dx^0}{\partial F/\partial k_0} = \cdots = \dfrac{dx^3}{\partial F/\partial k_3} = \dfrac{-dk_0}{\partial F/\partial x^0 + k_0(\partial F/\partial \psi)} = \cdots \\ \qquad = \dfrac{-dk_3}{\partial F/\partial x^3 + k_3(\partial F/\partial \psi)} = \dfrac{d\psi}{\sum(\partial F/\partial k_\alpha) k_\alpha}. \\ f = 0. \end{cases}$$

Mit $F(x^i, \psi, k_i) = g^{ij} k_i k_j$ folgt damit

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{\partial g^{jl}}{\partial x^i} k_j k_l, \qquad \frac{\partial F}{\partial \psi} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial k_i} = 2 g^{ij} k_j k_i.$$

Es gilt also auf der Integralmannigfaltigkeit von $\bar{S}$, die gleichzeitig diejenige von S ist (Choquet-Bruhat *et al.* (1982), Theorem IV.*C*.4 [pp. 238]), $df = dF = 0$. Insbesondere ergibt die Ableitung nach k_0

$$\frac{dF}{dk_0} = \frac{\partial F}{\partial k_0} + \frac{\partial F}{\partial k_\alpha} \frac{dk_\alpha}{dk_0} = 2g^{0j} k_j + 2g^{\alpha j} k_j q_\alpha = 0$$

also

$$\gamma^{\alpha\beta}k_\beta q_\alpha = g^{00}k_0 + g^{0\alpha}k_\alpha + g^{0\alpha}k_0 q_\alpha$$

Da $d(k^2) = 2k\,dk$ ist und $d(k^2) = d(\gamma^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta) = 2\gamma^{\alpha\beta}k_\beta q_\alpha dk_0$ gilt, folgt

$$\frac{k}{k_0}\,\frac{dk}{dk_0} = g^{00}\Big(1 + \frac{g^{0\alpha}}{g^{00}}\frac{k_\alpha}{k_0}\Big) + g^{00}\Big(1 + \frac{g^{0\alpha}}{g^{00}}\,q_\alpha\Big) - g^{00},$$

also mit (*) für dk/dk_0, mit (38) und mit der Bezeichnung $n = k/k_0$

$$(n - \sqrt{g^{00}})\,\frac{dk}{dk_0} = \sqrt{g^{00}}\,(n - \sqrt{g^{00}})$$

d.h. $dk/dk_0 = \sqrt{g^{00}}$. □

4. Stationäre und axialsymmetrische Gravitationsfelder

Wir betrachten nun die Ausbreitung von Nullfeldern in einer stationären Raumzeit. Für die Frequenz ω gilt

$$\omega = c\,\frac{\partial\psi}{\partial x^0} = \frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{46}$$

Da ∂_t ein Killingfeld ist, ist $\partial_t\psi = \text{const}$ in der gesamten Raumzeit, d. h. das Eikonal hat die Gestalt

$$\psi = \omega t + \psi_0(x^1, x^2, x^3). \tag{48}$$

Die mit der Eigenzeit τ eines beliebigen Beobachters γ gemessene Frequenz ω_γ ist dagegen $\omega_\gamma = \frac{\partial\psi}{\partial\tau}$; sie ist i. a. für verschiedene Raumpunkte verschieden.

Sei im folgenden $\omega\in\mathbb{R}$, $\omega > 0$. Die Eikonalgleichung lautet nun

$$g^{00}\,\frac{\omega^2}{c^2} + 2\,\frac{\omega}{c}\,g^{0\alpha}k_\alpha + g^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta = 0. \tag{49}$$

Sei die Frequenz ω vorgegeben. Da die 3-Metrik $\gamma^{\alpha\beta}$ in jedem Raumpunkt drei positive Eigenwerte hat, ist die Eikonalgleichung für reelle k_α eine Gleichung für ein Ellipsoid im $\mathbb{R}^3$.

Seien speziell die räumlichen lokalen Koordinaten (x^1, x^2, x^3) so gewählt, daß die 3-Metrik $\gamma^{\alpha\beta}$ in jedem Raumpunkt diagonal ist; dies ist immer möglich, s. Chandrasekhar (1983) [pp. 70] oder Stephani (1991). Dann läßt sich die Eikonalgleichung umschreiben zu

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\gamma^{\alpha\alpha}\Big(k_\alpha - \frac{g^{0\alpha}}{\gamma^{\alpha\alpha}}\,\frac{\omega}{c}\Big)^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}\Big(g^{00} + \frac{(g^{0\alpha})^2}{\gamma^{\alpha\alpha}}\Big)\,\frac{\omega^2}{c^2} \tag{50}$$

und ist also eine Gleichung für ein Ellipsoid mit den Mittelpunktskoordinaten $\frac{\omega}{c}g^{0\alpha}/\gamma^{\alpha\alpha}$. Dieses Ellipsoid stellt anschaulich dar, wie die Länge des dreidimensionalen Wellenzahlvektors von der Raumrichtung und wegen der Koordinatenabhängigkeit der metrischen Komponenten i. a. vom Ort $x\in U$ abhängt. Wir haben also als ein Resultat bezüglich skalarer Nullfelder in der Allgemeinen Relativität:

Satz 30. Eine Welle breitet sich in einem stationären Gravitationsfeld wie in einem inhomogenen anisotropen Medium aus.

Ist das Gravitationsfeld axialsymmetrisch, so existiert ein Killingfeld ∂_ϕ mit der Winkelkoordinate $\phi \in [0, 2\pi)$, vgl. Carter (1970), d.h. $\partial_\phi \psi = m = \text{const.}$ Ein axialsymmetrisches skalares Feld hat also das Eikonal

$$\psi(x^0, x^1, x^2, \phi) = m\phi + \psi_0(x^0, x^1, x^2). \tag{52}$$

Da für das Feld gelten muß $u(\phi = 0) = u(\phi = 2\pi)$, d. h. $e^{2i\pi m\phi + i\psi_0} = e^{i\psi_0}$, also $e^{2i\pi m\phi} = 1$, ist $m \in \mathbb{Z}$.

Mithin lautet die Eikonalgleichung in einer stationären axialsymmetrischen Raumzeit

$$g^{00}\frac{\omega^2}{c^2} + 2g^{03}\frac{\omega m}{c} + g^{33}m^2 + g^{AB}k_A k_B = 0 \tag{53}$$

$(A, B = 1, 2)$. Ferner ist sicher $k > 0$ für alle $m \neq 0$. Für ein vorgegebenes $x \in U$ folgt dann für $\omega > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ mit $\omega/c + mg^{03}/g^{00} = 0$, d. h.

$$\omega = -\frac{g^{03}}{g^{00}}cm \tag{54}$$

und mit (38), daß $K = -k^2 < 0$. Damit gilt:

Korollar 31. In Punkten $x \in U$, in denen Gleichung (54) gilt, ist der Wellenzahlvektor $k_j = (\omega/c, k_1, k_2, m)$ raumartig.

Bemerkung 32. Solange $0 < k_0 = g^{03}k_3/g^{00} < \sqrt{\gamma^{33}}\,|k_3|$ ist, gilt wegen $k \geqq \sqrt{\gamma^{33}}\,|k_3|$ immer $k > k_0$. Mit (35) bedeutet dies, daß die Phasengeschwindigkeit der Welle unter diesen Bedingungen größer als die Lichtgeschwindigkeit c ist (»Überschall«, Cherenkov-Strahlung). Dieses »Überschallphänomen« ist selbstverständlich ein Koordinatenphänomen, es ist keine »lokale«, keine physikalische Eigenschaft der Welle. Dazu paßt das folgende Zitat von Stephani (1991) bezüglich des Variationsprinzips in statischen Raumzeiten (für die ja $g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}$, $g_{00} = 1/g^{00}$ gilt):

> »... [*Die Krümmung der Lichtstrahlen*] *läßt sich auch so lesen, daß der dreidimensionale Raum (Metrik $g_{\alpha\beta}$) einen Brechungsindex $n = \sqrt{g_{00}}$ hat, der durch die Schwerkraft hervorgerufen wird (und der auch die Lichtablenkung mit bewirkt), und daß die Lichtgeschwindigkeit v im Gravitationsfeld entsprechend $c = nv$ vermindert ist. (...) v ist die Lichtgeschwindigkeit bezüglich der Koordinatenzeit t und hat deshalb, wie t selbst, keine unmittelbare physikalische Bedeutung. Aussagen über Zahlenwerte der Lichtgeschwindigkeit haben in der Allgemeinen Relativitätstheorie nur noch geringen Wert; wesentlich ist nur, daß sich Licht längs Nullgeodäten fortpflanzt* ... «

Betrachten wir nun die Kerr-Newman-Raumzeit mit den Parametern M, a, Q, $M \geqq 0$. Unter der Voraussetzung $M^2 \geqq a^2 + Q^2$, der kosmischen Zensur, und in Boyer-Lindquist-Koordinaten $(t, r, \vartheta, \varphi)$ ist die Bedingung $g^{00} > 0$ im gesamten Außenraum des schwarzen Lochs erfüllt, vgl. de Vries (1994), pp. 40, oder de Vries (1995). Außerdem ist

$$\gamma^{33} = \frac{r^2 + a^2\cos^2\vartheta}{\Sigma\sin^2\vartheta}, \qquad \frac{g^{03}}{g^{00}} = \frac{(2Mr - Q^2)\,a}{\Sigma}$$

mit der positiven Funktion $\Sigma = (r^2 + a^2\cos^2\vartheta)(r^2 + a^2) + (2Mr - Q^2)a^2\sin^2\vartheta$, wobei im Außenraum $r^2 + a^2 \geqq 2Mr - Q^2 > 0$ gilt. Damit folgt

$$\gamma^{33} - \left(\frac{g^{03}}{g^{00}}\right)^2 = \frac{(r^2 + a^2\cos^2\vartheta)\Sigma - (2Mr - Q^2)^2 a^2\sin^2\vartheta}{\Sigma^2\sin^2\vartheta}.$$

Mit der einfachen Abschätzung $r^2+a^2\cos^2\vartheta \geq r^2$ läßt sich dann zeigen, daß der Zähler größer ist als

$$r^4(r^2+a^2)+(2Mr-Q^2)r^2a^2\sin^2\vartheta-(2Mr-Q^2)^2a^2\sin^2\vartheta =$$
$$r^4(r^2+a^2)+(2Mr-Q^2)a^2\sin^2\vartheta\,(r^2-2Mr+Q^2),$$

was im Außenraum größer als $r^4(r^2+a^2)-(2Mr-Q^2)a^4\sin^2\vartheta \gtrsim (r^4-a^4)(r^2+a^2)>0$ ist, d. h. $\gamma^{33}-(g^{03}/g^{00})^2>0$. Mit $m\in\mathbb{Z}$ so, daß $am>0$, ist damit also die Voraussetzung aus Bemerkung 32 erfüllt. Ferner bemerken wir, daß $|g^{03}|/g^{00}$ bezüglich r (für $a\neq 0$ streng) monoton fallend ist, so daß der maximale Außenraumwert von $|g^{03}|/g^{00}$ im Limes genau am Horizont $r=r_+:=M+\sqrt{M^2-Q^2-a^2}$ angenommen wird. Dort gilt aber

$$\frac{g^{03}(r_+)}{g^{00}(r_+)}=\frac{(2Mr_+-Q^2)\,a}{\Sigma(r_+,\vartheta)}=\frac{a}{r_+^2+a^2},$$

z. B. de Vries (1994), pp. 51. Das ist die Rotationsgewschwindigkeit Ω_H des schwarzen Lochs. Nach Bemerkung 32 kann also das »Überschallphänomen« (bzgl. des Koordinatensystems, nicht physikalisch bzw. »lokal«!) nur auftreten für Wellen mit dem Wellenzahlvektor $k_j=(\omega/c,k_1,k_2,m)$, wenn

$$0<\omega\leq\frac{cam}{r_+^2+a^2}.$$

Dies ist exakt die Bedingung für das Auftreten der Superradianz, vgl. Chandrasekhar (1983) oder de Vries (1994), p. 54. Beachte, daß $r_+^2+a^2=2Mr_+-Q^2$.

Literatur

B. Carter (1970). The commutation property of a stationary, axisymmetric system. *Comm. Math. Phys.* **17**, 233-238.

S. Chandrasekhar (1983). *The Mathematical Theory of Black Holes.* Oxford University Press, New York.

Y. Choquet-Bruhat, C. deWitt-Morette & M. Dillard-Bleick (1982). *Analysis, Manifolds, and Physics. Revised Edition.* North-Holland, Amsterdam.

L. Hörmander (1983). *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I-IV.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

L.D. Landau & E.M. Lifschitz (1992). *Klassische Feldtheorie. 12., überarbeitete Auflage.* Akademie Verlag GmbH, Berlin.

C.W. Misner, K.S. Thorne & J.A. Wheeler (1973). *Gravitation.* W.H. Freeman and Co., San Francisco.

P. Morse & Ingard (1968). *Theoretical Acoustics.* McGraw-Hill, New York.

S. Nettel (1992). *Wave Physics. Oscillations – Solitons – Chaos.* Springer-Verlag, Berlin.

T. Poston & I. Stewart (1978). *Catastrophe Theory and its Applications.* Pitman Publishing Ltd., London.

M. Reed & B. Simon (1975). *Methods of Modern Mathematical Physics. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness.* Academic Press, New York.

E. Schmutzer (1989). *Grundlagen der Theoretischen Physik, Mit einem Grundriß der Mathematik für Physiker. Teil I & II.* B.I. Wissenschaftsverlag Mannheim.

H. Stephani (1991). *Allgemeine Relativitätstheorie. 4. Auflage.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

A. de Vries (1994). *Über die Beschränktheit der Energienorm bei der Evolution der Dirac-, Weyl- und Maxwellfelder in gekrümmten Raumzeiten.* Brockmeyer, Bochum.

A. de Vries (1995). The evolution of the Weyl and Maxwell fields in curved space-times. *Math. Nachr.* (submitted).