

Die Lorentz-Transformationen als komplexe Rotationen

Andreas de Vries

FH Südwestfalen, University of Applied Sciences, Haldener Straße 182, D-58095 Hagen, Germany

e-mail: dc-vries@fh-swf.de

Bochum, 1992

Dieser Aufsatz, angeregt durch das Buch von Srinivasa Rao (1988), ist eine Ausarbeitung zweier Vorträge im Oberseminar Analysis am 20. und 27. Mai 1992 am Mathematischen Institut der Ruhr-Universität Bochum. Es behandelt die Isomorphie der Lorentz-Transformationen und der komplexen Rotationen des \mathbb{C}^3 , sowie die dadurch begründete, etwas überraschende Tatsache, daß die Komplexifizierung der Quaternionen und der durch sie erzeugten reellen Rotationen des \mathbb{R}^3 die Isometrien des Minkowskiraums \mathbb{R}^4 ergeben. Konsequenz ist, daß die einfache Komplexifizierung der nichtrelativistischen Euklidischen Spinoren genau die relativistischen Spinoren ergibt. Wegen der Euklidischen Struktur läßt sich einerseits mühelos eine geometrische Begründung Hartungs (1979) des Pauli-Prinzips für halbzahlige Spin-Teilchen in der Quantenmechanik auf die relativistische Quantenfeldtheorie übertragen, andererseits könnten tiefe Verbindungen zur momentan wieder sehr aktuellen Euklidischen Feldtheorie à la Schwinger, vgl. Haag (1992) [S. 73ff], oder gar zu Ashtekars $SO(3, \mathbb{C})$ -Eichtheorie bestehen. Vor diesem Hintergrund wäre eine Untersuchung antisymmetrischer komplexer Bispinoren (Maxwell-Spinoren), die ja einen zu \mathbb{C}^3 isomorphen Vektorraum bilden, vgl. Carmeli (1977) [S. 173ff], sicherlich sehr lohnend.

Die Lorentz-Transformationen als komplexe Rotationen

1.1. Die Lie-Gruppen der orthogonalen Transformationen

Ein *differenzierbares Faserbündel* $\xi = (E, p, B, F; G)$ besteht aus der Mannigfaltigkeit E , dem *Total- oder Bündelraum*, der Mannigfaltigkeit B , der *Basis*, der *Faser* F , der Projektion $p: E \rightarrow B$ und der *Bündel- oder Strukturgruppe* G der Faser F , $G \times F \rightarrow F$, die der *Faserbündelstruktur* genügen: Über jeder offenen Koordinatenumgebung $U_\alpha \subset B$ im Basisraum existiert ein Diffeomorphismus $\varphi_\alpha: F \times U_\alpha \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$, der die Eigenschaft $p\varphi_\alpha(y, x) = x$ erfüllt. Weiter haben die Koordinatentransformationen des Faserbündels $\lambda_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha: F \times U_{\alpha\beta} \rightarrow F \times U_{\alpha\beta}$ mit $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ die Form $\lambda_{\alpha\beta} = (T^{\alpha\beta}(x)y, x)$, wobei $T^{\alpha\beta}(x): F \rightarrow F$ ein Element der Bündelgruppe G ist. Vgl. Dubrovin, Fomenko und Novikov (1985) oder Switzer (1975). Man schreibt auch manchmal $\xi = (E, p, B, F)$.

Ein *triviales Bündel* ist einfach die Projektion des direkten Produkts zweier Mannigfaltigkeiten auf den ersten Faktor mit trivialer Strukturgruppe. Ein *Prinzipalbündel* ist ein Faserbündel mit der Eigenschaft $F = G$, wobei die Strukturgruppe auf die Faser $F = G$ operiert.

Wichtige Klassen von Faserbündeln sind die folgenden:

(a) *Überlagerungen*. Hier ist die Faser diskret, G ist die Monodromiegruppe, und Total- und Basisraum haben gleiche Dimension. Eine Überlagerung, die gleichzeitig Prinzipalbündel ist, heißt *regulär*.

(b) *Homogene Räume*. Sei H abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe G und $M = G/H$ der homogene Raum, auf dem G transitiv operiert, und sei $p: G \rightarrow G/H = M$ die Projektion. Dies ist ein Prinzipalbündel, wobei die Isotropiegruppe H auf den Totalraum G durch Linksmultiplikation $g \mapsto hg$, $g \in G$, $h \in H$, operiert. Die Orbits dieser Operation sind die Rechtsnebenklassen von H , d. h. die Punkte des Basisraums M .

(c) *Tangentialbündel*. Ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M gegeben, und ist $T_x M$ der Tangentialraum von M an $x \in M$, so ist mit $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M \subset M \times \mathbb{R}^n$ und $p: TM \rightarrow M$, $(x, X) \mapsto x$, (TM, p, M, \mathbb{R}^n) ein Faserbündel.

(d) *n-Bein-Bündel (tangent n-frame bundle, Reperbündel)*. Seien M eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit und G Untergruppe der Automorphismen von $T_x M \cong \mathbb{R}^n$, $G \subset \text{Aut}(\mathbb{R}^n)$, und sei

$$E(M) := \{ (x, \xi) \mid x \in M, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in T_x M \text{ geordnete Basis} \}.$$

Ist $p: E(M) \rightarrow M$, $p(x, \xi) = x$, so ist $(E(M), p, M, G; G)$ ein Prinzipalbündel.

Jedes Prinzipalbündel über der Kreisscheibe D^n oder über \mathbb{R}^n mit einer Lieschen Strukturgruppe ist trivial (Dubrovin, Fomenko und Novikov, 1985, p. 239).

Aus der Homotopietheorie (vgl. z. B. Switzer, 1975, tom Dieck, 1991) folgert man, daß, da ein Faserbündel (E, p, B, F) insbesondere eine *Serre-Faserung* ist, die

Homotopiesequenz des Bündels

$$\dots \longrightarrow \pi_i(F) \longrightarrow \pi_i(E) \longrightarrow \pi_i(B) \longrightarrow \pi_{i-1}(F) \longrightarrow \dots$$

exakt ist. Hierbei ist für $i \geq 1$ die Homotopiegruppe eines allgemeinen topologischen Raumes X zum Basispunkt $x_0 \in X$, $\pi_i(X, x_0)$, definiert als die Homotopieklasse der Abbildungen $D^i \rightarrow X$, die den Rand der Kreisscheibe $\partial D^i = S^{i-1}$ auf x_0 abbilden. Für einen zusammenhängenden Raum X ist $\pi_i(X, x_0)$ unabhängig vom Basispunkt, weshalb man kurz $\pi_i(X)$ schreibt. Allgemein ist $\pi_i(X, x_0)$ Abelsch für $i \geq 2$, z.B. Switzer (1975), S. 34ff. $\pi_0(X)$ ist die Menge der Zusammenhangskomponenten von X . Konkret kennt man die Homotopiegruppen nur weniger Räume:

(i) $\pi_i(X, x_0) = 0$ für jedes $i \geq 0$, wenn X ein zusammenziehbarer Raum ist, z. B. $X = \mathbb{R}^n, D^n$;

(ii) $\pi_i(S^n) = 0$ für $0 \leq i < n$, $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

(iii) $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ für $n \geq 2$, siehe Stöcker und Zieschang (1988), S. 119.

Sei $M(n, \mathbb{R})$ die Menge aller $n \times n$ -Matrizen mit reellen Einträgen; dies ist eine n^2 -dimensionale \mathbb{R} -Algebra, insbesondere ein reeller Vektorraum. Die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen, $GL(n) = GL(n, \mathbb{R})$, ist eine offene Teilmenge in $M(n, \mathbb{R})$. Sie stellt die Gruppe der Automorphismen des Vektorraums \mathbb{R}^n dar. $GL(n)$ ist das grundlegende Beispiel einer Lie-Gruppe. Die meisten anderen Lie-Gruppen können als Untergruppen von $GL(n)$ definiert werden. Zum größten Teil können solche Untergruppen entweder durch Gleichungen für die Einträge der Matrizen oder äquivalent dazu als eine, eine gegebene Struktur des \mathbb{R}^n erhaltende, Untergruppe von Automorphismen eines Vektorraums $V \cong \mathbb{R}^n$ beschrieben werden. Die wichtigsten dieser strukturerhaltenden Automorphismen sind:

(a) $SL(n) = SL(n, \mathbb{R})$, die Gruppe der Volumelement-erhaltenden Automorphismen; entsprechend ist dies die Gruppe der $n \times n$ -Matrizen mit $\det A = 1$.

(b) Die *speziellen orthogonalen Transformationen*, die Untergruppe von $SL(n)$ sind und eine bestimmte nichtentartete Bilinearform $Q: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten; je nach Bilinearform ist dies

(i) für eine symmetrische positiv-definite Form Q die *spezielle orthogonale Gruppe* $SO(n) = SO(n, \mathbb{R})$;

(ii) für eine symmetrische indefinite Form Q die Gruppe $SO(p, q)$ (es gilt $SO(p, q) = SO(q, p)$);

(iii) für eine schiefsymmetrische Form Q die *symplektische Gruppe* $Sp(2n)$.

Die Gleichungen, die die Q -erhaltende Matrix-Untergruppe von $GL(n)$ bestimmen, sind einfach aufzuschreiben. Sei nämlich Q dargestellt als Matrix $G \in GL(n)$, d. h.

$$Q(v, w) = v^t G w$$

für $v, w \in \mathbb{R}^n$, so bedeutet die Bedingung $Q(Av, Aw) = Q(v, w)$, $A \in GL(n)$,

$$v^t A^t G A w = v^t G w$$

das heißt

$$A^t G A = G. \quad (1.1)$$

Läßt man bei den Gruppen $SO(n)$ und $SO(p, q)$ die Zusatzbedingung $\det A = 1$ an die Matrizen A fallen, so folgt durch die letzte Gleichung sofort, daß $(\det A)^2 = 1$, d. h. $\det A = \pm 1$. Dies sind dann die orthogonalen Gruppen $O(n)$ und $O(p, q)$.

Natürlich kann die Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$ komplex-linearer Automorphismen eines komplexen Vektorraums $V \cong \mathbb{C}^n$ als Untergruppe von $GL(2n, \mathbb{R})$ betrachtet werden. Sie ist also auch als reelle Lie-Gruppe aufzufassen, ebenso wie $SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$. Entsprechend sind $SO(n, \mathbb{C}) \subset SL(n, \mathbb{C})$ und $Sp(2n, \mathbb{C}) \subset SL(2n, \mathbb{C})$ Untergruppen von Transformationen des \mathbb{C}^n , die eine symmetrische bzw. eine schiefsymmetrische Bilinearform erhalten (Oft wird $Sp(2n) := Sp(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$ definiert; speziell ist $Sp(2) \cong SU(2)$, s. Hein, 1990). Sie sind ebenfalls sowohl reelle als auch komplexe Lie-Untergruppen. Beachte, daß alle nichtentarteten symmetrischen Bilinearformen eines komplexen Vektorraums isomorph sind (insbesondere gibt es keine Signatur). Somit gibt es bis auf Konjugation nur eine komplexe orthogonale Untergruppe $SO(n, \mathbb{C}) \subset SL(n, \mathbb{C})$, und keine Analoga zu den Gruppen $SO(p, q)$. Vgl. Fulton und Harris (1991).

Die Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , ist ein offenes Gebiet im n^2 -dimensionalen Vektorraum $M(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n^2}$. Als Koordinaten im \mathbb{K}^{n^2} können die n^2 Einträge der Matrizen betrachtet werden. Die Gruppe $SL(n, \mathbb{K})$ ist damit eine $(n^2 - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{K}^{n^2} , denn wegen der einzigen Gleichung $\det A = 1$ ist sie eine Hyperfläche. Die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n, \mathbb{K})$ ist definiert durch $A^t A = E$, d. h. mit $A = (a_{ij})$ durch

$$\sum_k a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij};$$

dies sind n^2 Gleichungen mit einigen durch Vertauschung der Indizes i, j bedingten Verdopplungen. Man hat also $n(n+1)/2$ unabhängige Gleichungen. Mit Hilfe der $n(n+1)/2$ unabhängigen Funktionen $f^{ij}: \mathbb{K}^{n^2} \rightarrow \mathbb{K}$, $f^{ij}(a_{hl}) = \sum_k a_{ki} a_{kj} - \delta_{ij}$, $i \leq j$, für die

$$\frac{\partial f^{ij}}{\partial a_{hl}} = 0 \quad \text{für } h \neq i, j, \quad \frac{\partial f^{ij}}{\partial a_{hi}} = a_{hj}, \quad \frac{\partial f^{ij}}{\partial a_{hj}} = a_{hi}$$

gilt, ist $SO(n, \mathbb{K})$ eine (nichtsinguläre) $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$ - dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{K}^{n^2} . Siehe Dubrovin *et al.* (1984).

Die komplexe Sphäre $S_{\mathbb{C}}^n$

Es sei im folgenden für jedes $z \in \mathbb{C}$, $z = r e^{i\varphi}$, $r \in \mathbb{R}_0^+$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, die Wurzel durch

$$\sqrt{z} := \sqrt{r} e^{i\varphi/2}$$

eindeutig definiert. Sei $H^+ := \mathbb{R}_0^+ \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere komplexe Halbebene ohne die negativen reellen Zahlen. Dann ist $\sqrt{z} \in H^+$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Sei

$$R^+ := \{z \in H^+ \mid z^2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

d.h. $R^+ = \mathbb{R}^+ \cup i\mathbb{R}^+$.

1.1.1. Definition. Es sei für $c \in H^+$

$$S_{\mathbb{C}}^n(c) := \left\{ z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{k=1}^{n+1} z_k^2 = c^2 \right\} \quad (1.2)$$

$S_{\mathbb{C}}^n(c)$ ist eine komplexe n -dimensionale Hyperfläche des \mathbb{C}^{n+1} . Die komplexe Einheitskugel bezeichnen wir einfach mit $S_{\mathbb{C}}^n$, also $S_{\mathbb{C}}^n = S_{\mathbb{C}}^n(1)$.

Z. B. ist $S_{\mathbb{C}}^0(r) = \{\pm r\} = S^0(r)$ für $r > 0$.

1.1.2. Lemma. Für $r \in \mathbb{R}^+$ ist $S_{\mathbb{C}}^n(r) \cong TS^n$, wobei $TS^n = \{(x, y) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid xy = 0\}$ das Tangentialbündel der n -Sphäre S^n ist.

Beweis. Sei $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \dots, n+1$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} z_k^2 = \sum_{k=1}^{n+1} (x_k^2 - y_k^2) + 2i \sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k$$

d. h. $S_{\mathbb{C}}^n(r) \cong \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x^2 - y^2 = r^2, xy = 0\}$. Damit ist $S_{\mathbb{C}}^n(r)$ Teilmenge einer Pseudosphäre, nämlich entweder $S_{n+1}^{2n+1}(|r|) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x^2 - y^2 = |r|^2\}$ oder $S_{n+1}^{2n+1}(i|r|) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x^2 - y^2 = -|r|^2\}$. Mit den Diffeomorphismen $\Phi^+: S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow S_{n+1}^{2n+1}(|r|)$, $(u, v) \mapsto (\sqrt{|r|^2 + v^2} u, v)$, bzw. $\Phi^-: S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow S_{n+1}^{2n+1}(i|r|)$, $(u, v) \mapsto (v, \sqrt{|r|^2 + v^2} u)$, ist $S_{\mathbb{C}}^{2n+1}(r) \cong S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \forall r \in \mathbb{R}^+$. Die Zusatzbedingung $xy = 0$ für $(u, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ lautet $uv = 0$, d. h. $v \in T_u S^n$. \square

Aus der Topologie weiß man, daß das Tangentialbündel TS^n genau für $n = 0, 1, 3, 7$ trivial ist, siehe z. B. tom Dieck (1991).

Für $r = 0$ entartet das Bündel zu einem Kegel, dem *isotropen Kegel* $S_{\mathbb{C}}^n(0) = \{z^2 = 0\}$, vgl. Klein & Sommerfeld (1897).

Beispiele. (a) $n = 1$. Sei $u \in S^1$, $u = (\cos \varphi, \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, und sei $v \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$(\cos \varphi, \sin \varphi, v) \mapsto (\sqrt{1+v^2} \cos \varphi, \sqrt{1+v^2} \sin \varphi, -v \sin \varphi, v \cos \varphi)$$

d. h. $y \in T_u S^1$ ist gegeben durch

$$y = A_u \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad \text{mit } A_u = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \in SO(2).$$

Da $e_1 = (-\sin \varphi, \cos \varphi) \in \mathbb{R}^2$ eine orthonormale Basis von $T_u S^1 \cong \mathbb{R}$ ist, ist diese Abbildung für jedes u bijektiv, und die Umkehrabbildung für $y = y_1 e_1$ ist $v = p_2(A_u^{-1}y) = y_1$, wobei $p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y$, ist. Also ist $S_{\mathbb{C}}^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$.

(b) $n = 2$. Sei $S^2 \setminus \{\pm 1\}$ die 2-Sphäre ohne Nord- und Südpol. Sei $u \in S^2 \setminus \{\pm 1\}$, $u = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in (0, \pi)$, und sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Sei $r \in \mathbb{R}^+$, und sei $\Phi^+: S^2 \setminus \{\pm 1\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\Phi^+(u, v) = (x, y)$ mit

$$x = \sqrt{r^2 + v^2} u, \quad y = A_u \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit}$$

$$A_u = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & -\sin \varphi & -\cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \varphi & -\cos \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \end{bmatrix},$$

$A_u \in SO(3)$. Also ist

$$y = (v_1 \sin \vartheta \cos \varphi - v_2 \sin \varphi, v_1 \sin \vartheta \sin \varphi + v_2 \cos \varphi, -v_1 \cos \vartheta).$$

Dann ist $y^2 = v_1^2 + v_2^2 = v^2$, $x^2 - y^2 = r^2 + v^2 - v^2 = r^2$ und $xy = 0$, d. h. $(x, y) \in S_{\mathbb{C}}^2(r)$. Sei nun $P = \{z = (iy_1, iy_2, x_3 + iy_3) \in S_{\mathbb{C}}^2 \mid x_3, y_k \in \mathbb{R}\}$. Dann ist $(\Phi^+)^{-1}$ auf $S_{\mathbb{C}}^2(r) \setminus P$ gegeben, und es gilt $(\Phi^+)^{-1}(x, y) = (u, v) \in S^2 \setminus \{\pm 1\} \times \mathbb{R}^2$ mit

$$u = \sqrt{r^2 + y^2}^{-1} x, \quad v = p_{12}(A_u^{-1}y),$$

wobei $p_{12}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(y_1, y_2, y_3) \mapsto (y_1, y_2)$, die Projektion auf die ersten beiden Koordinaten darstellt. Da $xy = 0$ genau dann gilt, wenn auch $uy = 0$ ($u \in S^2 \setminus \{\pm 1\}$)

ist, und die Rotation angewandt auf $u = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$ den Punkt $u' = (1, 0, 0)$ ergibt, wird die Tangentialebene $T_u S^2$ an u auf die Ebene $(y_1, y_2, 0)$ abgebildet. Da $e_1 = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$, $e_2 = (-\cos \vartheta \cos \varphi, -\cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta) \in \mathbb{R}^3$ Orthonormalbasis von $T_u S^2$ für jedes $u \in S^2$ (und eindeutig für $u \in S^2 \setminus \{\pm 1\}$), ist also jedes y eindeutig darstellbar als $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$. Es gilt daher

$$S_{\mathbb{C}}^2(r) \setminus P \cong S^2 \setminus \{\pm 1\} \times \mathbb{R}^2.$$

Analog ist $\Phi^-: S^2 \setminus \{\pm 1\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (x, y) = (A_u v^t, \sqrt{|r|^2 + v^2} u)$, d.h. $x^2 - y^2 = -|r|^2$ und $xy = 0$, also Bild $\Phi^- \subset S_{\mathbb{C}}^2(|r|)$, mit der Umkehrabbildung $(\Phi^-)^{-1}: S_{\mathbb{C}}^2(|r|) \setminus P' \rightarrow T(S^2 \setminus \{\pm 1\})$, $(x, y) \mapsto (u, v) = (\sqrt{r^2 + y^2}^{-1} y, p_{12}(A_u^{-t} x))$ mit $P' := \{z = (x_1, x_2, x_3 + iy_3) \in \mathbb{C}^n\}$ ein Diffeomorphismus, d.h.

$$S_{\mathbb{C}}^2(|r|) \setminus P' \cong S^2 \setminus \{\pm 1\} \times \mathbb{R}^2$$

□

1.1.3. Lemma. Für $i \geq 0$ ist $\pi_i(S_{\mathbb{C}}^n) \cong \pi_i(S^n)$.

Beweis. $(S^n, p, S_{\mathbb{C}}^n, \mathbb{R}^n)$, $p: S_{\mathbb{C}}^n \rightarrow S^n$, $(u, y) \mapsto u$, ist mit der Strukturgruppe $SO(n, \mathbb{R})$ ein Faserbündel. Das bedeutet, daß die Homotopiesequenz

$$\pi_i(\mathbb{R}^n) \rightarrow \pi_i(S_{\mathbb{C}}^n) \rightarrow \pi_i(S^n) \rightarrow \pi_{i-1}(\mathbb{R}^n)$$

für alle $i > 0$ exakt ist. Da jedoch $\pi_i(\mathbb{R}^n) = \pi_{i-1}(\mathbb{R}^n) = 0$ gilt, ist der Gruppenhomomorphismus $\pi_i(S_{\mathbb{C}}^n) \rightarrow \pi_i(S^n)$ für $i \geq 1$ isomorph. Für $i = 0$ bleibt zu zeigen, daß $S_{\mathbb{C}}^n$ wegzusammenhängend ist; sei etwa für ein beliebiges $z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in S_{\mathbb{C}}^n$ der Weg

$$w(z, \cdot): [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}, \quad w_1(z, t) = \pm \sqrt{(1-t)^2 z_1^2 + t(2-t)}, \quad w_j(z, t) = (1-t)z_j,$$

$k = 2, \dots, n+1$, gegeben. Dabei sei das Vorzeichen der Wurzel bei w_1 so gewählt, daß $w_1(z, 0) = z_1$. Wegen $\sum w_k^2 = (1-t)^2 \sum z_k^2 + 2t - t^2 = 1$ ist dann $w(z, t) \in S_{\mathbb{C}}^n$ für alle $t \in [0, 1]$. Da $w(z, 0) = z$ und $w(z, 1) = (\pm 1, 0, \dots, 0)$ gilt und $(-1, 0, \dots, 0)$ als Punkt auf S^n mit $(1, 0, \dots, 0)$ verbindbar ist, z. B. durch $t \mapsto (\cos \pi t, \sin \pi t, 0, \dots, 0)$, $t \in [0, 1]$, ist z in derselben Zusammenhangskomponente wie $(1, \dots, 0)$. □

1.1.4. Folgerung. Für $n \geq 2$ ist $S_{\mathbb{C}}^n$ einfach zusammenhängend.

Beweis. Da $\pi_1(S^n) = 0$ für $n \geq 2$, folgt mit dem Lemma sofort $\pi_1(S_{\mathbb{C}}^n) = 0$. □

1.1.5. Lemma. $SO(n, \mathbb{C}) \rightarrow SO(n+1, \mathbb{C}) \rightarrow S_{\mathbb{C}}^n$ ist ein Prinzipalbündel.

Beweis. $SO(n+1, \mathbb{C})$ operiert linear auf \mathbb{C}^{n+1} , und transitiv eingeschränkt auf $S_{\mathbb{C}}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Die Isotropiegruppe des Punktes $x = (1, 0, \dots, 0) \in S_{\mathbb{C}}^n$ besteht aus allen Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad A \in SO(n, \mathbb{C})$$

d. h. $SO(n, \mathbb{C})$ ist Isotropiegruppe von $S_{\mathbb{C}}^n$. Daraus folgt die Behauptung. □

Betrachten wir nun die holomorphen Funktionen $\cos, \sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\cos \tau = \frac{1}{2} (e^{i\tau} + e^{-i\tau}), \quad \sin \tau = \frac{1}{2i} (e^{i\tau} - e^{-i\tau}). \quad (1.3)$$

1.1.7. Satz. Für $n \geq 1$ und mit $\tau = \vartheta + it$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$ und $t \in \mathbb{R}$, wird $SO(n, \mathbb{C})$ von $R^{(k, l)}(\vartheta)$ und $R^{(k, l)}(it)$ erzeugt; mit der Beziehung

$$R^{(k, l)}(\vartheta + it) = R^{(k, l)}(\vartheta) R^{(k, l)}(it) \quad (1.6)$$

bedeutet dies, daß $SO(n, \mathbb{C})$ von $R^{(k, l)}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{C}$, erzeugt wird. Insbesondere erzeugen die reellen Rotationen $R^{(k, l)}(\vartheta)$ die Untergruppe $SO(n, \mathbb{R}) \subset SO(n, \mathbb{C})$. Das bedeutet, daß

$$SO(n, \mathbb{C}) \cong SO(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2} \quad (1.7)$$

als Mannigfaltigkeiten gilt, d. h. $SO(n, \mathbb{C})/SO(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ ist ein Prinzipal-bündel.

Beweis. Es gilt $\det R^{(k, l)}(\tau) = 1$, und $(R^{(k, l)}(\tau))^t R^{(k, l)}(\tau) = 1$, also ist $\det A = 1$ für jedes $A = R^{(k, l)}(\vartheta) \cdot R^{(r, s)}(it)$, $A^t A = (R^{(r, s)}(it))^t \cdot (R^{(k, l)}(\vartheta))^t \cdot R^{(k, l)}(\vartheta) \cdot R^{(r, s)}(it) = 1$, d. h. $A \in SO(n, \mathbb{C})$; analog ist $A' = R^{(r, s)}(it) \cdot R^{(k, l)}(\vartheta) \in SO(n, \mathbb{C})$. Da die von $R^{(k, l)}(\vartheta)$ und $R^{(r, s)}(it)$, $k, l, r, s = 1, \dots, n$, $k < l, r < s$, erzeugte Untergruppe von $SO(n, \mathbb{C})$ den Rang

$$2 \binom{n}{2} = n(n-1)$$

und $SO(n, \mathbb{C})$ als Mannigfaltigkeit die Dimension $\dim_{\mathbb{R}} SO(n, \mathbb{C}) = n(n-1)$ hat, erzeugen $R^{(k, l)}(\vartheta)$ und $R^{(r, s)}(it) \in SO(n, \mathbb{C})$. Da $R^{(k, l)}(\vartheta)$ nur reelle Einträge hat, ist offensichtlich $R^{(k, l)}(\vartheta) \in SO(n, \mathbb{R})$, und sie erzeugen $SO(n, \mathbb{R})$. \square

Wir können also das folgende suggestive Faserbündeldiagramm zeichnen:

$$\begin{array}{ccccc} SO(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & SO(n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n(n-1)/2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ SO(n+1, \mathbb{R}) & \longrightarrow & SO(n+1, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^n & \longrightarrow & S_{\mathbb{C}}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \end{array}$$

1.1.8. Bemerkungen.

(i) $S_{\mathbb{C}}^n \cong SO(n+1, \mathbb{C})/SO(n, \mathbb{C})$ ist homogener Raum von $SO(n+1, \mathbb{C})$ mit Isotropiegruppe $SO(n, \mathbb{C})$.

(ii) $\mathbb{R}^{n(n-1)/2} \cong SO(n, \mathbb{C})/SO(n, \mathbb{R})$ ist homogener Raum von $SO(n, \mathbb{C})$ mit Isotropiegruppe $SO(n, \mathbb{R})$;

(iii) $SO(n, \mathbb{R})$ ist maximal kompakte Untergruppe von $SO(n, \mathbb{C})$, Hehn (1990), Fulton und Harris (1991).

(iv) Die Gruppe der Rotationen $SO(3) = SO(3, \mathbb{R})$ wird erzeugt von den drei Rotationen

$$S_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad S_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad S_3(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\alpha \in [0, 2\pi)$, wobei $S_i(\alpha)$ eine Rotation um die x_i -Achse um den Drehwinkel α ist. Analog erzeugen $S_i(\tau)$, $i = 1, 2, 3$, $\tau = \vartheta + it$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, $t \in \mathbb{R}$, die Gruppe $SO(3, \mathbb{C})$ der komplexen Rotationen.

Schärfer kann man formulieren, daß zu jedem $A \in SO(3) = SO(3, \mathbb{R})$ eindeutige $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$, die *Eulerschen Winkel*, existieren, so daß $A = S_3(\alpha)S_1(\beta)S_3(\gamma)$ ist. $SO(3)$ wird durch $S_1(\alpha)$ und $S_3(\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, erzeugt; siehe Hein (1990).

1.1.9. Korollar. Für $i \geq 0$ gilt

$$\pi_i(SO(n, \mathbb{C})) \cong \pi_i(SO(n, \mathbb{R})).$$

Beweis. $SO(n, \mathbb{R}) \rightarrow SO(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ ist Prinzipalbündel, also ist die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_i(\mathbb{R}^{n(n-1)/2}) & \longrightarrow & \pi_i(SO(n, \mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_i(SO(n, \mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(\mathbb{R}^{n(n-1)/2}) \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

($i > 0$) exakt. Außerdem ist $SO(n, \mathbb{C})$ zusammenhängend, denn (Induktion über n) $SO(n-1, \mathbb{C}) \rightarrow SO(n, \mathbb{C}) \rightarrow S_{\mathbb{C}}^n$ ist Prinzipalbündel, und da sowohl Faser als auch Basis zusammenhängend sind, ist es auch der Totalraum; mit $SO(1, \mathbb{C}) = \{1\}$ folgt die Behauptung. Entsprechend ist auch $SO(n, \mathbb{R})$ zusammenhängend. \square

1.1.10. Bemerkung. Es gilt $SO(2, \mathbb{C}) \cong SO(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Mit dem Diffeomorphismus

$$\Phi: S^1 \rightarrow SO(2), \quad (\cos \varphi, \sin \varphi) \mapsto \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

folgt $SO(2) \cong S^1$, und damit $SO(2, \mathbb{C}) \cong S^1 \times \mathbb{R}$. Daher ist

$$\pi_1(SO(2, \mathbb{C})) \cong \pi_1(SO(2)) \cong \mathbb{Z}.$$

1.1.11. Lemma. Für $n \geq 3$ gilt $\pi_1(SO(n, \mathbb{C})) \cong \pi_1(SO(n+1, \mathbb{C}))$.

Beweis. Betrachte das Prinzipalbündel $SO(n, \mathbb{C}) \rightarrow SO(n+1, \mathbb{C}) \rightarrow S_{\mathbb{C}}^n$. Da $\pi_1(S_{\mathbb{C}}^n) = \pi_2(S_{\mathbb{C}}^n) = 0$ für $n \geq 3$ gilt, lautet die Homotopiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_2(S_{\mathbb{C}}^n) & \longrightarrow & \pi_1(SO(n, \mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_1(SO(n+1, \mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_1(S_{\mathbb{C}}^n) \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

Da sie exakt ist, folgt die Behauptung. \square

Weiter unten (Gleichung (1.36)) werden wir sehen, daß $SO(3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}P^3$ gilt, d. h.

$$\pi_1(SO(n, \mathbb{C})) \cong \pi_1(SO(n, \mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2 \quad \text{für } n \geq 3.$$

Allgemein weiß man von den Homotopiegruppen der orthogonalen Transformationsgruppen $SO(n) = SO(n, \mathbb{R})$, daß

$$\pi_i(SO(n)) \cong \pi_i(SO) \quad \text{für } i < n-1, \quad \text{wobei} \quad SO = \bigcup_{n=1}^{\infty} SO(n).$$

Die Gruppen $\pi_i(SO)$ hängen nur von $i \bmod 8$ ab (*Bottsche Periodizität*):

$i \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_i(SO)$	0	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	0	0	0	\mathbb{Z}

siehe tom Dieck (1991) und darin aufgeführte Literatur.

1.1.12. Korollar. Es gilt die Gruppenisomorphie $SO(3, \mathbb{C}) \cong SO^+(1, 3)$.

Beweis. Durch die Identifikation der drei imaginären Rotationen $R^{(k,l)}(it)$, $1 \leq k < l \leq 3$, aus Satz (1.1.7) mit den drei Lorentz-Boosts $B_j(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) und mit den Gleichungen (1.6) ist die Isomorphie offensichtlich. \square

Natürlich wirkt $SO^+(1, 3)$ auf den reell vierdimensionalen Minkowskiraum \mathbb{M} , während $SO(3, \mathbb{C})$ auf den sechsdimensionalen reellen Vektorraum \mathbb{C}^3 wirkt.

1.1.13. Definition. Seien für $m \in \mathbb{R}^+$ durch

$$\begin{aligned} M_+^m &:= \{x \in \mathbb{M} \mid x_j x^j = m^2, x^0 > 0\} \text{ die Massenschale,} \\ M_-^m &:= \{x \in \mathbb{M} \mid x_j x^j = m^2, x^0 < 0\}, \\ M_+^0 &:= \{x \in \mathbb{M} \mid x_j x^j = 0, x^0 > 0\} \text{ der Zukunftslichtkegel,} \\ M_-^0 &:= \{x \in \mathbb{M} \mid x_j x^j = 0, x^0 < 0\} \text{ der Vergangenheitslichtkegel und} \\ M^{im} &:= \{x \in \mathbb{M} \mid x_j x^j = -m^2\}. \end{aligned}$$

dreidimensionale Untermannigfaltigkeiten des Minkowski-Raumes \mathbb{M} definiert. Sie bilden eine Blätterung von $\mathbb{M} \setminus \{0\}$ und sind die Orbits von $SO^+(1, 3)$. Insbesondere operiert $SO^+(1, 3)$ transitiv auf ihnen.

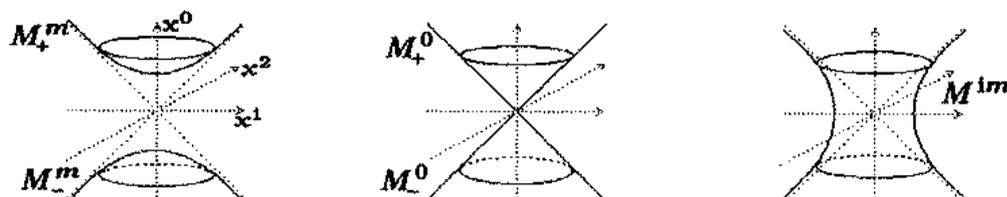


Fig. 1.1. Die Orbits von $SO^+(1, 3)$.

Sei $x = (x^0, \mathbf{x}) \in \mathbb{M}$, d.h. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, und sei $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$, so daß $(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0$. Dann definieren wir für $m \geq 0$ die C^∞ -Isometrien $f_\pm^m: M_\pm^m \rightarrow S_{\mathbb{C}}^2(im)$,

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \mathbf{z} = \mathbf{x} + ix_0 \mathbf{u},$$

sowie $g_\pm^m: S_{\mathbb{C}}^2(im) \setminus \{0\} \rightarrow M_\pm^m$, $\mathbf{z} \mapsto (\pm |\mathbf{y}|, \mathbf{x})$, wobei $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$. Seien weiter für $m > 0$ $f: M \rightarrow S_{\mathbb{C}}^2(m)$, $f(x) := f_+(x)$ und $g: S_{\mathbb{C}}^2(m) \rightarrow M$ $g^{im}(x) := g_+^m(x)$. Da $\{S_{\mathbb{C}}^2(m) \mid r \in \mathbb{R}^+\}$ eine Blätterung des $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ ist, sind die f 's injektive Abbildungen der \mathbb{M} - in die \mathbb{C}^3 -Blätter, und die g 's surjektive Abbildungen der \mathbb{C}^3 - in die \mathbb{M} -Blätter.

1.1.14. Bemerkung. $\{M_+^m \mid m \geq 0\}$ bildet eine Blätterung des Zukunftskegels V^+ ; für seinen Rand gilt $\partial V^+ = M_+^0 \cup \{0\}$.

1.2. Orthogonale Geometrie über einem Körper \mathbb{K}

Ein Element σ einer allgemeinen Gruppe heißt *involutorisch*, wenn es von der Ordnung 2 ist, d. h. wenn $\sigma^2=1$ und $\sigma \neq 1$ ist. Eine Gruppe heißt *zweispiegelig*, wenn in ihr jedes Element als Produkt von zwei involutorischen Elementen darstellbar ist. Es gilt

1.2.1. Lemma. Enthält das Zentrum einer zweispiegeligen Gruppe kein involutorisches Element, so besteht es nur aus dem Einselement.

Beweis. In einer zweispiegeligen Gruppe ist das Quadrat jedes Zentrumselements gleich 1, denn sei $s = \sigma\sigma'$ Zentrumselement, σ, σ' involutorisch. s kommutiert insbesondere mit σ , d. h. $s\sigma = \sigma s = \sigma\sigma\sigma' = \sigma'$, d. h. $s^2=1$. \square

Sei \mathbb{K} ein kommutativer Körper mit Charakteristik $\neq 2$.*) Seien weiter V ein n -dimensionaler Vektorraum über \mathbb{K} und $Q: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform auf V . Das Paar (V, Q) oder kurz V ist dann ein *Vektorraum mit orthogonaler Geometrie*. Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen *orthogonal*, wenn $Q(v, w) = 0$ ist. Ein Vektor $v \in V$, der zu sich selbst orthogonal ist, für den also $Q(v, v) = 0$ ist, heißt *isotrop* oder *null*. Ist $v \neq 0$ und isotrop, so heißt v *echt isotrop*. Ein Untervektorraum $N \subset V$ heißt *isotrop*, wenn $Q(v, w) = 0 \forall v, w \in N$ gilt. Das *Radikal* von V ist die Menge

$$\text{rad } V := \{ v \in V \mid Q(v, w) = 0 \forall w \in V \}.$$

Besteht das Radikal nicht nur aus dem Nullvektor, so heißen sowohl V als auch Q *entartet* oder *ausgeartet*. Ein isotroper Untervektorraum N ist sein eigenes Radikal, $N = \text{Rad } N$. Er ist also hochgradig entartet.

Die hyperbolische Ebene.

Sei $x \in V$ isotrop, $x \notin \text{rad } V$. Dann existiert ein $v \in V$ mit $Q(x, v) =: \alpha \neq 0$. Sei $w := \frac{1}{\alpha}v$. Der Vektor $y := -\frac{1}{2}Q(w, w)x + w$ ist isotrop ($\text{char } \mathbb{K} \neq 2$), und es gilt $Q(y, x) = Q(w, x) = 1$. Ferner sind y und x linear unabhängig, denn für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda x + \mu y = 0 \Rightarrow \mu Q(x, y) = 0 \Rightarrow \mu = 0$.

Damit ist x also eingebettet in die Ebene $H = \text{span}(x, y)$ mit $Q(x, x) = Q(y, y) = 0$, $Q(y, x) = 1$. H heißt *hyperbolische Ebene*, und x, y *geordnetes hyperbolisches Paar*. H ist nicht entartet, denn wie oben folgt aus $\lambda x + \mu y \in \text{rad } H$, daß $\mu = 0$ ist, und es gilt $Q(\lambda x, y) = 0$ nur dann, wenn $\lambda = 0$ ist. Sei ein Vektor $\lambda x + \mu y \in H$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, gegeben. Er ist genau dann isotrop, wenn $2\lambda\mu = 0$ ist, und er hat die Länge 1 genau dann, wenn $2\lambda\mu = 1$: Die Einheitsvektoren von H bilden also eine Hyperbel (daher der Name für H). Die beiden Vektoren

$$e_1 = \frac{1}{2}x + y, \quad e_2 = \frac{1}{2}x - y \tag{1.8}$$

bilden eine Orthonormalbasis von H . Seien $v, w \in H$, $v = v_1e_1 + v_2e_2$, $w = w_1e_1 + w_2e_2$, so folgt $Q(v, w) = v_1w_1 - v_2w_2$, und $Q(v, v) = v_1^2 - v_2^2$.

Sei N ein isotroper Untervektorraum von V , und seien $p = \dim N$ und $n = \dim V$. Dann gilt

$$p \leq \frac{1}{2}n, \tag{1.9}$$

siehe Artin (1965), p. 122.

Eine lineare Transformation A des Vektorraums heißt *orthogonal* oder *isometrisch*,

*) Für $\text{char } \mathbb{K} = 2$ ist *orthogonal* dasselbe wie *symplektisch*, s. Artin (1965).

wenn $Q(Aa, Ab) = Q(a, b)$ für alle $a, b \in V$ gilt. Ist die Form Q nichtentartet, so folgt aus dieser Eigenschaft (wie oben) $\det A = \pm 1$. Die orthogonalen Transformationen eines Vektorraums $V \cong \mathbb{K}^n$ bilden eine Gruppe, bezeichnet mit $O(n, \mathbb{K})$; die Menge $SO(n, \mathbb{K}) := \{A \in O(n, \mathbb{K}) \mid \det A = 1\}$ ist ebenfalls eine Gruppe, die der *speziellen orthogonalen Transformationen* (vgl. obige Definitionen für die Spezialfälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$); sie werden auch *Rotationen* oder *Drehungen* genannt. Es gilt folgendes Lemma (vgl. Ewald, 1971):

1.2.2. Lemma. Sei $A \in O(n, \mathbb{K})$. Dann gilt:

- (a) Ist $\det A = (-1)^{n+1}$, so ist 1 Eigenwert von A ;
- (b) Ist $\det A = -1$, so ist -1 Eigenwert von A .

Beweis. (a) Da $A^t A = E$ ist, gilt $A^t(A - E) = E - A^t = -E(A^t - E) = -E(A - E)^t$. Mit $\det(-E) = (-1)^n$ und $\det A^t = \det A = (-1)^{n+1}$ folgt daraus $(-1)^{n+1} \det(A - E) = (-1)^n \det(A - E)$, also $\det(A - E) = -\det(A - E)$ bzw. $\det(A - E) = 0$. Dies ist aber die charakteristische Gleichung zum Eigenwert 1.

(b) Ähnlich folgt aus $A^t(A + E) = (E + A)^t$ und $\det(A^t(A + E)) = \det A^t \det(A + E)$, daß $\det(A + E) = 0$ ist. Also ist -1 Eigenwert. \square

1.2.3. Folgerung. Für ein ungerades n hat jede Rotation $A \in SO(n, \mathbb{K})$ (mindestens) eine Fixgerade, nämlich die von einem Eigenvektor zum Eigenwert 1 aufgespannte Gerade.

Ist Q nichtentartet, so ist der orthogonale Teilraum v^\perp eines Vektors $v \in V$ eine Hyperebene. Sei für $v \in V$ die zu v orthogonale Hyperebene mit Π_v bezeichnet, d. h. $\Pi_v = \{w \in V \mid Q(v, w) = 0\}$. Ein isotroper Vektor liegt in der zu ihm orthogonalen Hyperebene.

1.2.4. Satz. Sei V nichtentarteter Vektorraum mit orthogonaler Geometrie. Dann existieren in jeder Ebene $P \subset V$ immer zwei linear unabhängige nichtisotrope Vektoren. Insbesondere ist jeder isotrope Vektor $x \in V$ Linearkombination von zwei nichtisotropen Vektoren $v, w \in \Pi_x = x^\perp$.

Beweis. Wird P von zwei echt isotropen Vektoren aufgespannt, so ist P eine hyperbolische Ebene, und man findet mit (1.8) eine Orthonormalbasis. Ist andernfalls $P = \text{span}(x, v)$, wobei x isotroper und v nichtisotroper Vektor ist, so wähle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda, \mu \neq 0$, so, daß

$$2\lambda Q(x, v) + \mu Q(v, v) \neq 0 \tag{1.10}$$

gilt. Dann ist der Vektor $w := \lambda x + \mu v$ wegen $Q(w, w) = \mu(\mu Q(v, v) + 2\lambda Q(x, v)) \neq 0$ nichtisotrop, und v und w sind linear unabhängig. \square

1.2.5. Definition. Für einen nichtisotropen Vektor $a \in V$ ist die *Spiegelung* $\sigma_a: V \rightarrow V$ (*symétrie* bei Cartan, 1938, p. 12) eines Vektors bezüglich der Hyperebene Π_a durch $x \mapsto x' = \sigma_a x$ definiert, wobei x' den beiden Bedingungen

- (i) $x' - x$ ist orthogonal zu Π_a ,
- (ii) $(x' + x)/2$ ist in der Hyperebene Π_a

genügt. Dazu äquivalent ist

$$\sigma_a x = x \quad \text{für alle } x \in \Pi_a, \quad \sigma_a x = -x \quad \text{für alle } x = \lambda a, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Die Bedingung (i) besagt, daß $x' - x = \lambda a$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$, d. h. $x' = x + \lambda a$ gilt. Eingesetzt in die Bedingung (ii) ergibt dies $Q(a, (2x + \lambda a)/2) = 0$, also $Q(a, 2x) + Q(a, \lambda a) = 0$, und das bedeutet $\lambda = -2Q(a, x)/Q(a, a)$. Somit läßt sich die Spiegelung $x' = \sigma_a x$ ausdrücken durch

$$\sigma_a x = x - 2a \frac{Q(x, a)}{Q(a, a)}. \quad (1.11)$$

(Dies ist genau $-\sigma_a$ bei Bachmann, 1973, der Spiegelungen an nichtisotropen Geraden a betrachtet). Eine Spiegelung σ_a ist offensichtlich eine involutorische orthogonale Transformation mit der Determinante $\det \sigma_a = -1$, d. h. $\sigma_a \in O(n, \mathbb{K})$, aber $\notin SO(n, \mathbb{K})$, siehe Cartan (1938).

1.2.6. Satz. Jede orthogonale Transformation $A \in O(n, \mathbb{K})$ ist ein Produkt von k Spiegelungen für ein $k \leq n$. Siehe Artin (1965), [chap. III, Theorem 3.20, pp. 129].

Wegen $\det \sigma_a = -1$ ist jede Drehung $R \in SO(n, \mathbb{K})$ also ein Produkt von $2k$ Spiegelungen, $2k \leq n$. Umgekehrt sind zwei Spiegelungen immer eine Drehung. Siehe Cartan (1938), p. 13 ff, oder Hein (1990). Wegen dieser Zweispiegeligkeit folgt mit obigem Lemma, daß das Zentrum von $SO(3, \mathbb{K})$ nur aus dem Einselement besteht.

Speziell für $n=3$ ist also jede Rotation $R \in SO(3, \mathbb{K})$ als Produkt von zwei Spiegelungen darstellbar. Außerdem ist der Eigenwert $\lambda=1$ von R entweder dreifach entartet, d. h. $R=E$, oder einfach. Also hat jede Rotation $R \neq E$ genau eine Fixgerade, die *Drehachse*.

Ein isotroper Untervektorraum N eines dreidimensionalen Vektorraums V über \mathbb{K} hat wegen (1.9) die Dimension 0 oder 1.

Sei $g \subset V$ eine beliebige Gerade, und sei $R \in SO(3, \mathbb{K})$ eine Rotation mit Drehachse g .

1. Fall: g ist nicht isotrop. Mit $V = g \oplus g^\perp$ folgt $Rg^\perp = g^\perp$. Da $g^\perp \cong \mathbb{K}^2$ ist, gilt

$$\{R \in SO(3, \mathbb{K}) \mid Rg = g\} \cong SO(2, \mathbb{K});$$

2. Fall: g ist isotrop. Sei $x \in g$. Dann ist x ein isotroper Vektor, also ist $x \in g^\perp$. Sei $v \in g^\perp$ ein nichtisotroper Vektor mit $v \in g^\perp$, d. h. $g^\perp = \{\lambda x + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$. Für eine Rotation R mit $Rg = g$ folgt $Rg^\perp = g^\perp$. Wegen $Q(v, v) = Q(Rv, Rv) = Q(\lambda x + \mu v, \lambda x + \mu v) = \mu^2 Q(v, v)$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{K}$), also $\mu = \pm 1$, gilt für alle orthogonalen Transformationen $A \in O(3, \mathbb{K})$ mit $Ag = g$: $Av = \lambda x \pm v$, $\lambda = \lambda(A)$. Sei umgekehrt für ein gegebenes $\lambda \in \mathbb{K}$

$$w(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda x - v \in g^\perp.$$

Wegen $Q(w(\lambda), w(\lambda)) = Q(v, v)$ hat die Spiegelung $\sigma_{w(\lambda)}$ mit (1.11) die folgenden Eigenschaften: $\sigma_{w(\lambda)} x = x$, und $\sigma_{w(\lambda)} v = -\lambda x - v$, insbesondere $\sigma_{w(0)} v = -v$. Dann gilt für $R(\lambda) := \sigma_{w(0)} \sigma_{w(\lambda)} \in SO(3, \mathbb{K})$: $R(\lambda) x = x$, $R(\lambda) v = \lambda x + v$. Damit ist

$$\{A \in O(3, \mathbb{K}) \mid Ag = g\} \cong \{\sigma_{w(\lambda)} \mid \lambda \in \mathbb{K}\},$$

da x und v eine Basis von g^\perp bilden. Ferner folgt für die Rotationen mit der Beziehung $R(\lambda)R(\mu) = R(\lambda + \mu)$ die Gruppenisomorphie

$$\{R \in SO(3, \mathbb{K}) \mid Rg = g\} \cong (\mathbb{K}, +).$$

Sei für zwei nichtisotrope Vektoren $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{K}^3$ das *Vektorprodukt* durch

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} := (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1) \in \mathbb{K}^3$$

definiert.

1.2.7. Lemma. Für zwei nichtisotrope Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{K}^3$ hat die Rotation $\sigma_{\mathbf{v}} \sigma_{\mathbf{w}}$ die Achse $\text{span}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

Beweis. Da $Q(\mathbf{v}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}) = Q(\mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ gilt, ist $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \in \Pi_{\mathbf{v}} \cap \Pi_{\mathbf{w}}$, d. h. $\sigma_{\mathbf{v}} \sigma_{\mathbf{w}}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \sigma_{\mathbf{v}}(\sigma_{\mathbf{w}}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})) = \sigma_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. \square

1.2.8. Bemerkung. Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^3$ isotrop, und seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \Pi_{\mathbf{x}}$ nichtisotrope Vektoren. Dann ist $\mathbf{x} = r(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ für ein $r \in \mathbb{K}$. Gleichzeitig ist $\mathbf{x} = s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$, wobei $s := -\mu/\lambda$ und $t := 1/\lambda$ mit λ und μ aus (1.10).

1.2.9. Definition. Eine Drehung $\sigma_{\mathbf{v}} \sigma_{\mathbf{w}} \in SO(3, \mathbb{K})$ mit isotroper Achse $\text{span}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ heißt *Nulldrehung*.

1.3. Quaternionenalgebren

Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement 1. Dann ist der freie A -Modul A^4 mit der kanonischen Basis $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, die den *Quaternionenrelationen*

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \quad (1.12)$$

genügt, und der daraus resultierenden Multiplikation eine freie A -Algebra, die *Algebra der Quaternionen*, und wird bezeichnet mit $\mathbb{H}(A)$, vgl. Scheja und Storch (1980).

$\mathbb{H}(A)$ ist genau dann kommutativ, wenn $1 = -1$ in A ist. Das Zentrum von $\mathbb{H}(A)$ ist die multiplikative Gruppe von A ,

$$Z(\mathbb{H}(A)) = A^\times. \quad (1.13)$$

Jedes Element $z = z_0 + z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j} + z_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}(A)$, $z_i \in A$, heißt ein *Quaternion* über A . Das zu z *konjugierte Quaternion* ist definiert durch

$$\bar{z} = z_0 - z_1\mathbf{i} - z_2\mathbf{j} - z_3\mathbf{k}.$$

Die Abbildung $z \mapsto \bar{z}$ heißt (*Quaternionen-*) *Konjugation* in $\mathbb{H}(A)$. Seien $z, w \in \mathbb{H}(A)$. Dann ist $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\bar{\bar{z}} = z$ und $\bar{z}w = \bar{w}\bar{z}$, und es gilt: $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in A$.

Für $x, y \in \mathbb{H}(A)$, $x = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$, $y = y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$, ist das *Skalarprodukt* $Q = (\cdot, \cdot): \mathbb{H}(A) \rightarrow A$ definiert durch

$$(x, y) := \frac{1}{2} (x\bar{y} + y\bar{x}) = \sum_{k=0}^3 x_k y_k \quad (1.14)$$

(Man verifiziert leicht die zweite Gleichung). Offensichtlich ist $(x, y) = (y, x)$. Für jedes Quaternion $z \in \mathbb{H}(A)$ bezeichnet man als (*reduzierte*) *Norm* $N(z)$ das A -Element

$$N(z) = (z, z) = z\bar{z} = \sum_{k=0}^3 z_k^2$$

Für $z, w \in \mathbb{H}(A)$ gilt $N(zw) = zw\bar{w}\bar{z} = zN(w)\bar{z} = z\bar{z}N(w) = N(z)N(w)$; dabei gilt die dritte Gleichung, weil $N(w) \in A$ im Zentrum von $\mathbb{H}(A)$ liegt.

1.3.1. Bemerkung. $z \in \mathbb{H}(A)$ ist genau dann multiplikativ invertierbar in $\mathbb{H}(A)$, wenn $N(z)$ invertierbar in A ist. In diesem Fall ist

$$z^{-1} = N(z)^{-1} \bar{z}. \quad (1.15)$$

Beweis. Aus $zw = wz = 1$ folgt $1 = N(1) = N(zw) = N(z)N(w)$. Sei umgekehrt $N(z)$ invertierbar in A . Dann ist $N(z)^{-1}$ mit allen Quaternionen vertauschbar, und $N(z)^{-1} \bar{z}$ ist wegen $z(N(z)^{-1} \bar{z}) = N(z)^{-1} z\bar{z} = 1$ zu z invers. \square

$\mathbb{H}(A)$ ist genau dann ein Schiefkörper, wenn A ein Körper ist und $N(z) = 0$ nur für $z = 0$ gilt.

Sei $\mathbb{H}^\times(A)$ die multiplikative Gruppe der invertierbaren Quaternionen. Sei ferner

$$Q_A = \{ z \in \mathbb{H}(A) \mid N(z) = 1 \} \subset \mathbb{H}^\times(A) \quad (1.16)$$

die Menge der *Einheitsquaternionen*. Da für $x, y \in Q_A$ wegen $N(xy) = N(x)N(y) = 1$ auch $xy \in Q_A$ und mit (1.15) $x^{-1} \in Q_A$ gilt, ist Q_A eine Gruppe. Die Bezeichnung Q_A geht auf Srinivasa Rao (1988) zurück.

Die kanonische Basis von $\mathbb{H}(A)$ läßt sich auch durch die *Pauli-Spinmatrizen* σ_j , $j = 0, 1, 2, 3$,

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

ausdrücken: $1 = \sigma_0$, $i = -i\sigma_1$, $j = -i\sigma_2$, $k = -i\sigma_3$. Sie genügen den Relationen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_j^2 &= 1, \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ \sigma_1\sigma_2 &= -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

was genau den Quaternionrelationen (1.12) entspricht, vgl. Dubrovin, Fomenko und Novikov (1984).

Richten wir nun das Augenmerk auf die *reinen Quaternionen*

$$\mathbb{H}(A)_{\text{pur}} = \{ \mathbf{q} = q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \}. \quad (1.19)$$

Man sieht sofort, daß $\mathbb{H}(A)_{\text{pur}} \cong A^3$ ist. Für ein reines Quaternion \mathbf{q} gilt

$$\mathbf{q} = -\bar{\mathbf{q}} \quad \text{und} \quad \mathbf{q}^2 = -N(\mathbf{q}) \in A. \quad (1.20)$$

Für ein Quaternion \mathbf{q} mit $N(\mathbf{q}) \neq 0$ und der Gleichung (1.15) für die Inverse, also $\mathbf{q}^{-1} = N(\mathbf{q})^{-1} \bar{\mathbf{q}}$, hat man also die bemerkenswerte Beziehung

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}/\mathbf{q}^2. \quad (1.21)$$

Mit anderen Worten: Man kann Quotienten von Vektoren eines dreidimensionalen Raums bilden.

Die reinen Quaternionen über einem Körper $A = \mathbb{K}$ mit Charakteristik ungleich 2 bilden einen dreidimensionalen Vektorraum über \mathbb{K} mit dem Skalarprodukt

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\sum_{k=1}^3 x_k y_k = -\frac{\mathbf{xy} + \mathbf{yx}}{2} \quad (1.22)$$

1.3.2. Satz. Jedes Quaternion ist als Produkt von zwei reinen Quaternionen darstellbar.

Beweis. Jedes $y \in \mathbb{H}(\mathbb{K})$ ist darstellbar durch $y = y_0 + \mathbf{y}$ mit $y_0 \in \mathbb{K}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{H}(\mathbb{K})_{\text{pur}} \cong \mathbb{K}^3$. Sei $\Pi_{\mathbf{y}}$ die Ebene orthogonal zu \mathbf{y} . Dann existiert nach Satz (1.2.4) ein reines Quaternion $\mathbf{b} \in \Pi_{\mathbf{y}}$ mit $N(\mathbf{b}) \neq 0$. Offensichtlich ist $y_0 \mathbf{b} \in \mathbb{H}(\mathbb{K})_{\text{pur}}$; aus $(\mathbf{y}, \mathbf{b}) = 0$ folgt mit (1.22) und (1.20) $\mathbf{yb} = -\mathbf{by} = -\overline{\mathbf{b}\overline{\mathbf{y}}} = -\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}}$, also $\mathbf{yb} \in \mathbb{H}(\mathbb{K})_{\text{pur}}$. Folglich ist $\mathbf{yb} = y_0 \mathbf{b} + \mathbf{yb}$ und damit auch $-\mathbf{yb}/N(\mathbf{b}) = \mathbf{yb}^{-1}$ ein reines Quaternion. Sei $\mathbf{a} := \mathbf{yb}^{-1}$; dann ist $y = \mathbf{ab}$. \square

1.3.3. Bemerkung. Eine Spiegelung an der orthogonalen Ebene eines nichtisotropen Vektors \mathbf{g} , $(\mathbf{g}, \mathbf{g}) \neq 0$, ist nach der Spiegelungsformel (1.11) nichts anderes als

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - 2\mathbf{g} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{g})}{(\mathbf{g}, \mathbf{g})} = \mathbf{x} - \mathbf{g}\mathbf{x} \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{g}^2} - \mathbf{g} \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{g}^2} \mathbf{x},$$

d. h.

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{g}\mathbf{x}\mathbf{g}^{-1} \quad \text{mit } (\mathbf{g}, \mathbf{g}) \neq 0. \quad (1.23)$$

An der Ebene senkrecht auf ein Quaternion \mathbf{g} spiegeln bedeutet also mit dem Quaternion \mathbf{g} konjugieren.

Allgemein gilt, daß die multiplikative Quaternionengruppe $\mathbb{H}(\mathbb{K})^\times$ orthogonal auf $\mathbb{H}(\mathbb{K})$ wirkt,

$$\mathbb{H}(\mathbb{K})^\times \times \mathbb{H}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{K}), \quad (q, \mathbf{x}) \mapsto q\mathbf{x}q^{-1},$$

da $N(q\mathbf{x}q^{-1}) = N(q)N(\mathbf{x})N(q)^{-1} = N(\mathbf{x})$ für die Norm aus $\mathbb{H}(\mathbb{K})$ gilt. Diese Wirkung läßt den Unterraum $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}(\mathbb{K})$ invariant. Also bildet sie das orthogonale Komplement \mathbb{K}^\perp , die Menge der reinen Quaternionen, orthogonal auf sich selbst ab. Damit gibt es also eine induzierte Wirkung auf \mathbb{K}^\perp . Man erhält also einen (nicht surjektiven) Homomorphismus $\pi: \mathbb{H}(\mathbb{K})^\times \rightarrow O(3, \mathbb{K})$, der durch

$$\pi_q(\mathbf{x}) = q\mathbf{x}q^{-1} \quad \text{für } q \in \mathbb{H}(\mathbb{K})^\times \text{ und } \mathbf{x} \in \mathbb{K}^\perp \quad (1.24)$$

gegeben ist. Mit Satz (1.3.2), Bemerkung (1.3.3) und Satz (1.2.6) können wir jedoch sofort den schärferen Satz schließen:

1.3.4. Satz. Für jede Rotation $R \in SO(3, \mathbb{K})$ existieren zwei reine Quaternionen \mathbf{v}, \mathbf{w} mit $N(\mathbf{v}), N(\mathbf{w}) \neq 0$, so daß

$$R\mathbf{x} = \mathbf{vw}\mathbf{x}\mathbf{w}^{-1}\mathbf{v}^{-1} \quad \text{für jedes } \mathbf{x} \in \mathbb{K}^\perp;$$

d. h. jede Rotation ist darstellbar durch ein Quaternion q

$$R\mathbf{x} = q\mathbf{x}q^{-1} \quad (1.25)$$

mit $q = \mathbf{vw} \in \mathbb{H}(\mathbb{K})$, $N(q) = N(\mathbf{v})N(\mathbf{w}) \neq 0$. Dabei ist $\mathbb{K} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ die Rotationsachse. Umgekehrt ist jedes Quaternion q mit $N(q) \neq 0$ geometrisch gesehen eine Drehung. Dabei bestimmt offensichtlich das Quaternion cq für $c \in \mathbb{K}^\times$ dieselbe Drehung wie q .

Es gilt $qxq^{-1} = x \forall x \in \mathbb{K}^3$ genau dann, wenn $qzq^{-1} = z \forall z \in \mathbb{H}(\mathbb{K})$, d. h. wenn q im Zentrum liegt, $q \in Z(\mathbb{H}(\mathbb{K})) \subset \mathbb{H}(\mathbb{K})^\times$. Mit (1.13) stellt also $q \in \mathbb{H}(\mathbb{K})^\times$ dann und nur dann die Identität $E \in SO(3, \mathbb{K})$ dar, wenn $q \in \mathbb{K}^\times$ ist. Insbesondere ist die Einschränkung des Homomorphismus' von Gleichung (1.24) auf $Q_{\mathbb{K}} \subset \mathbb{H}(\mathbb{K})^\times$,

$$\pi: Q_{\mathbb{K}} \rightarrow SO(3, \mathbb{K}), \quad \pi_q(\mathbf{x}) = q\mathbf{x}q^{-1}, \quad (1.26)$$

ein Epimorphismus von Gruppen, und es gilt ($Q_{\mathbb{K}} \cap \mathbb{K}^\times = \{\pm 1\}$)

$$\ker \pi = \{\pm 1\}. \quad (1.27)$$

Lesenswert haben bereits Klein und Sommerfeld (1897) Kapitel *Einführung in die Kinematik und Kinetik des Kreisels* die Beziehung zwischen (reellen) Quaternionen und Drehungen herausgestellt. Ihr Konzept der *Wendestreckung* entspricht jedoch nicht der Spiegelung an einer Hyperebene, sondern wie bei Bachmann (1973) derjenigen an einer nichtisotropen Geraden. Die hier dargelegten Betrachtungen der Ebenenspiegelungen entsprechen der Sichtweise von Misner, Thorne und Wheeler (1973) – sie bezeichnen die erzeugenden Spiegelungen als *versions* – und der von Bledenharn und Louck (1981), die, beeinflusst von Klein und Sommerfeld, den Begriff *turn* gebrauchen.

Die komplexen Quaternionen $\mathbb{H}(\mathbb{C})$

Im Gegensatz zu den reellen Quaternionen $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbb{R})$ bilden die komplexen keinen Schiefkörper, denn $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ ist nicht nullteilerfrei: z. B. gilt $(1+if)(1-if) = 0$. Für $z \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ wird die *komplexe Konjugation* des Quaternions z durch

$$z^* = \bar{z}_0 + \bar{z}_1i + \bar{z}_2j + \bar{z}_3k \quad (1.28)$$

definiert.

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, daß jedes Einheitsquaternion $q \in Q_{\mathbb{C}}$ eine Drehung im komplexen Vektorraum $\mathbb{H}(\mathbb{C})_{\text{pur}} \cong \mathbb{C}^3$ beschreibt. Wir wollen nun untersuchen, wie die Rotation für ein gegebenes $q \in Q_{\mathbb{C}}$ konkret aussieht.

Sei für ein $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$

$$\sigma_{\mathbf{z}} := (\mathbf{z}, \sigma) = z_1\sigma_1 + z_2\sigma_2 + z_3\sigma_3 = \begin{bmatrix} z_3 & z_1 - iz_2 \\ z_1 + iz_2 & -z_3 \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Dann ist $-i\sigma_{\mathbf{z}} = z_1i + z_2j + z_3k$ ein reines Quaternion. Außerdem gilt für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^3$

$$\sigma_{\mathbf{v}}\sigma_{\mathbf{w}} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) + i\sigma_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}, \quad (1.30)$$

insbesondere also $\sigma_{\mathbf{v}}\sigma_{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Jedes Einheitsquaternion $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in Q_{\mathbb{C}}$ läßt sich damit eindeutig schreiben als

$$q = q_0 - i\sigma_{\mathbf{q}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{C}^3. \quad (1.31)$$

Mit Satz (1.3.4) existieren zwei reine Quaternionen $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^3$ mit $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 1$, deren Produkt q ergibt, $q = \mathbf{v}\mathbf{w}$, d. h. $q = -\sigma_{\mathbf{v}}\sigma_{\mathbf{w}} = -(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - i\sigma_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}$. Daraus folgt

$$q_0 = -(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \text{und} \quad \mathbf{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}. \quad (1.32)$$

Damit entspricht jedem komplexen Einheitsquaternion $q = q_0 - i\sigma_{\mathbf{q}}$ eine Drehung um die Achse \mathbf{q} .

Fall 1: \mathbf{q} ist nichtisotrop. Dann läßt sich q eindeutig darstellen durch

$$q = e^{-i\tau \sigma_{\mathbf{u}}/2} = \sigma_0 \cos \frac{\tau}{2} - i \sigma_{\mathbf{u}} \sin \frac{\tau}{2}$$

für ein $\tau \in \mathbb{C}$ und den Einheitsvektor $\mathbf{u} = \mathbf{q}/\sqrt{(\mathbf{q}, \mathbf{q})} \in \mathbb{C}^3$, und es ist

$$q^{-1} = \bar{q} = e^{i\tau \sigma_{\mathbf{u}}/2} = \sigma_0 \cos \frac{\tau}{2} + i \sigma_{\mathbf{u}} \sin \frac{\tau}{2}.$$

1.3.5. Lemma. Für ein Einheitsquaternion $q \in \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$, $q = e^{-i\tau \sigma_{\mathbf{u}}/2}$, $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$, stellt die Abbildung aus Gleichung (1.26),

$$\pi_q: \mathbb{H}(\mathbb{C})_{\text{pur}} \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{C})_{\text{pur}}, \quad \mathbf{x} \mapsto q\mathbf{x}q^{-1}$$

eine Rotation von $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3 \cong \mathbb{H}(\mathbb{C})_{\text{pur}}$ um die Drehachse $\mathbb{C}\mathbf{u}$ mit dem Winkel $\tau \in \mathbb{C}$ dar.

Beweis. Für einen beliebigen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{H}(\mathbb{C})_{\text{pur}}$ gilt

$$i\mathbf{x} = -x_1 - x_2j + x_2k,$$

$$x_i = -x_1 + x_2j - x_2k,$$

d. h.

$$i\mathbf{x} - x_i = 2(-x_2j + x_2k),$$

$$ix_i = -x_1i + x_2j + x_2k = \mathbf{x} - 2x_1i.$$

Damit folgt speziell für $q = \cos \tau/2 + \sin \tau/2 i = \cos \tau/2 - i\sigma_1 \sin \tau/2 \in \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned} q\mathbf{v}q^{-1} &= (\cos \frac{\tau}{2} + \sin \frac{\tau}{2} i)\mathbf{v}(\cos \frac{\tau}{2} - \sin \frac{\tau}{2} i) \\ &= \cos^2 \frac{\tau}{2} \mathbf{v} + \cos \frac{\tau}{2} \sin \frac{\tau}{2} (i\mathbf{v} - \mathbf{v}i) - \sin^2 \frac{\tau}{2} i\mathbf{v}i \\ &= \frac{1}{2} \cos \tau + \frac{\mathbf{v}}{2} + \frac{1}{2} \cos \tau i\mathbf{v}i - \frac{i\mathbf{v}i}{2} + \frac{1}{2} \sin \tau (i\mathbf{v} - \mathbf{v}i) \\ &= x_1i + (x_2 \cos \tau - x_3 \sin \tau)j + (x_2 \sin \tau + x_3 \cos \tau)k. \end{aligned}$$

Dies ist eine Drehung um die i -Achse mit dem (komplexen) Winkel τ . Die Rechnungen für die j - und die k -Achse sind analog, und damit gilt die Behauptung für jedes reine Quaternion. □

Eine Rotation $R(\tau) \in SO(3, \mathbb{C})$ um die nichtisotrope Achse $\mathbb{C}\mathbf{u}$, $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$, läßt sich also darstellen durch

$$R(\tau) = e^{-i\tau \sigma_{\mathbf{u}}/2} = \sigma_0 \cos \frac{\tau}{2} - i \sigma_{\mathbf{u}} \sin \frac{\tau}{2}. \quad (1.33a)$$

Die inverse Rotation $R^{-1}(\tau)$ lautet einfach

$$R^{-1}(\tau) = R(-\tau) = e^{i\tau \sigma_{\mathbf{u}}/2} = \sigma_0 \cos \frac{\tau}{2} + i \sigma_{\mathbf{u}} \sin \frac{\tau}{2}. \quad (1.33b)$$

Fall 2: \mathbf{q} ist isotrop. Dann ist $\pi_q: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $\mathbf{x} \mapsto q\mathbf{x}q^{-1}$, eine Nulldrehung im \mathbb{C}^3 . Wegen $1 = q\bar{q} = q_0^2 + (\mathbf{q}, \mathbf{q}) = q_0^2$ ist

$$q_0 = \pm 1.$$

Seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$ zwei Einheitsquaternionen, für die $q = \mathbf{v}\mathbf{w}$ gilt. Anders ausgedrückt ist $q = (-i\sigma_{\mathbf{v}})(-i\sigma_{\mathbf{w}}) = -\sigma_{\mathbf{v}}\sigma_{\mathbf{w}}$, d. h.

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -q_0 = \mp 1, \quad q = \mathbf{v} \times \mathbf{w}.$$

Da \mathbf{q} isotrop ist und $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \Pi_{\mathbf{q}}$ in der isotropen Ebene liegen, ist $\mathbf{q} = r\mathbf{v} + s\mathbf{w}$ für $r, s \in \mathbb{C}$, $r, s \neq 0$. Mit $0 = (\mathbf{q}, \mathbf{q}) = (r\mathbf{v} + s\mathbf{w}, r\mathbf{v} + s\mathbf{w}) = r^2 - 2q_0rs + s^2 = (r - q_0s)^2$ folgt

$$\mathbf{q} = r(\mathbf{v} + q_0\mathbf{w}).$$

Damit ist übrigens $v' = (v, w)w$ keine Projektion, denn $v - v' = v + q_0 w$ ist isotrop, d. h. (v, w) ist *nicht* der Cosinus des Winkels zwischen v und w .

1.3.6. Beispiel. Für $z \in \mathbb{C}$ entspricht dem Einheitsquaternion

$$q = q(z) = 1 + \frac{iz}{2} i - \frac{z}{2} j = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{C}},$$

die Drehung um den isotropen Vektor $q = (iz/2, -z/2, 0) \in \mathbb{C}^3$ bzw. um die Achse $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + iz_2 = 0, z_3 = 0\}$. Die zugehörige Matrix lautet

$$A(z) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{z^2}{2} & -\frac{iz^2}{2} & -z \\ -\frac{iz^2}{2} & 1 + \frac{z^2}{2} & -iz \\ z & iz & 1 \end{bmatrix} \in SO(3, \mathbb{C}),$$

denn

$$\begin{aligned} qxq^{-1} &= x + \frac{iz}{2}(ix - xi) - \frac{z}{2}(jx - xj) + \frac{iz^2}{4}(ixj - jxi) + \frac{z^2}{4}ixi - \frac{z^2}{4}jxj \\ &= (i, j, k) \cdot A(z) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen

$$A(z) \begin{pmatrix} z_1 \\ i(z_1 - p) \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - z^2 p/2 - zz_3 \\ i(z_1 - p) - iz^2 p/2 - izz_3 \\ zp - z_3 \end{pmatrix}$$

beschreiben die Punkte in der isotropen Ebene $\Pi_q = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + iz_2 = 0\}$ bei Variation von z als Bahnen parallele isotrope Geraden, und die Punkte in den zueinander parallelen isotropen Ebenen $\Pi(p) := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + iz_2 = p\}$ ($p \in \mathbb{C}, p \neq 0$) (*Studysche*) *parabolische Kreise* $K(p) := \{(pz^2/2, ipz^2/2, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z \in \mathbb{C}\}$ (d. i. gleichzeitig eine Schraubenlinie); siehe Strubecker (1969).

Mit der Identität $A(0)$ und der Beziehung $A(z_1)A(z_2) = A(z_1 + z_2)$ ist die Menge $\{A(z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ eine komplexe einparametrische Lie-Gruppe, die transitiv auf den isotropen Ebenen $\Pi(p), p \in \mathbb{C}$, wirkt. Seien die Matrizen

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} & -\frac{iz}{\sqrt{1+z^2}} \\ 0 & \frac{iz}{\sqrt{1+z^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} \frac{1-z^2/2}{\sqrt{1+z^2}} & -\frac{iz^2}{2\sqrt{1+z^2}} & 0 \\ \frac{iz^2}{2\sqrt{1+z^2}} & \frac{1-z^2/2}{\sqrt{1+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{1+z^2} & 0 & -z \\ 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & \sqrt{1+z^2} \end{bmatrix}$$

gegeben. Dann ist $A(z) = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3$. □

Sei $M(2, \mathbb{C})$ die vierdimensionale \mathbb{C} -Algebra der komplexen 2×2 -Matrizen mit der Basis $e_{kl}, k, l = 1, 2$,

$$e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und ihren 16 Produkten $e_{kl}e_{lm} = e_{km}$, $e_{kl}e_{mn} = 0$ für $l \neq m$, vgl. Dickson (1914).

1.3.7. Lemma. Es gelten die Gruppenisomorphismen

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\mathbb{C}) &\cong M(2, \mathbb{C}), \\ \mathbb{Q}_{\mathbb{C}} &\cong SL(2, \mathbb{C}). \end{aligned} \tag{1.34}$$

Beweis: Seien die Pauli-Matrizen σ_j , $j=0, \dots, 3$, als Basis von $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ gegeben. Man sieht sofort, daß

$$e_{11} = \frac{1 + \sigma_3}{2}, \quad e_{12} = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2}, \quad e_{21} = \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2}, \quad e_{22} = \frac{1 - \sigma_3}{2}$$

gilt, und umgekehrt

$$1 = e_{11} + e_{22}, \quad \sigma_1 = e_{12} + e_{21}, \quad \sigma_2 = i(e_{12} - e_{21}), \quad \sigma_3 = e_{11} - e_{22}.$$

Sei nun $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Mit Hilfe der Pauli-Matrizen läßt sich q darstellen als eine Matrix $\Lambda(q) = q_0 \sigma_0 - i q_1 \sigma_1 - i q_2 \sigma_2 - i q_3 \sigma_3$, also

$$\Lambda(q) = \begin{bmatrix} q_0 - i q_3 & -q_2 - i q_1 \\ q_2 - i q_1 & q_0 + i q_3 \end{bmatrix}. \tag{1.35}$$

Dies ist offensichtlich mit den Quaternionenrelationen der Pauli-Matrizen ein Algebra-Isomorphismus. Weiter ist $\det \Lambda(q) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = N(q)$. Also ist $q \in \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$ genau dann, wenn $\Lambda(q) \in SL(2, \mathbb{C})$. \square

Im Gegensatz dazu ist die Gruppe der reellen Quaternionen $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbb{R})$ nicht isomorph zu $M(2, \mathbb{R})$ (obschon ein Monomorphismus von $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ nach $M(2, \mathbb{C})$ existiert, Dubrovin *et al.* 1984). Beschränkt man sich jedoch auf reelle Werte für die q_j im obigen Beweis, so sieht man sofort die wohlbekanntete Isomorphie

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{R}} \cong SU(2) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, \det A = 1 \right\}.$$

Zwar ist $SU(2) \subset M(2, \mathbb{C})$ keine komplexe Untermannigfaltigkeit des Vektorraums $M(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^4$, jedoch eine reelle Mannigfaltigkeit: Sei $A \in U(2)$, also

$$A = e^{i\varphi} \begin{bmatrix} \alpha_0 - i\alpha_3 & -\alpha_2 - i\alpha_1 \\ \alpha_2 - i\alpha_1 & \alpha_0 + i\alpha_3 \end{bmatrix},$$

$\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. Damit sieht man, daß $U(2) \cong S^1 \times S^3$. Die Bedingung $\det A = 1$ bedeutet, daß $\varphi = 0$ ist, und daher

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{R}} \cong SU(2) \cong S^3.$$

Die reellen Zahlen α_j , $(\alpha_0, \alpha) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ heißen *Euler-Rodrigues-Parameter*, siehe z. B. Biedenharn und Louck (1981), [p. 18].

1.3.8. Folgerung. Offensichtlich gilt $S_{\mathbb{C}}^3 \cong \mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$. Daraus folgt mit Lemma (1.1.3)

$$SL(2, \mathbb{C}) \cong S^3 \times \mathbb{R}^3,$$

d. h. $SL(2, \mathbb{C})$ ist wegen $\pi_1(SL(2, \mathbb{C})) \cong \pi_1(S^3) \oplus \pi_1(\mathbb{R}^3) = 0$ einfach zusammenhängend.

Mit den Gleichungen (1.26) und (1.27) ist durch

$$\pi: SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(3, \mathbb{C}),$$

wobei $\pi_q(\mathbf{x}) = q\mathbf{x}q^{-1}$ für $q \in SL(2, \mathbb{C})$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$ ist, eine zweifache Überlagerung von $SO(3, \mathbb{C})$ gegeben. Eingeschränkt auf \mathbb{R} ergibt das $SO(3, \mathbb{R}) \cong S^3 / \{\pm 1\} \cong \mathbb{R}P^3$. Da $\pi_1(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}_2$ ist, folgt

$$\pi_1(SO(3, \mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2. \quad (1.36)$$

Vgl. Dubrovin, Fomenko und Novikov (1985) oder Bröcker und tom Dieck (1985).

1.3.9. Bemerkung. $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbb{R})$ kann als komplexer zweidimensionaler Vektorraum mit der Standardbasis $1, j = -j = i\sigma_2 \in \mathbb{H}$,

$$i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

angesehen werden, und ist mit den Multiplikationsregeln $zj = j\bar{z}$ für $z \in \mathbb{C}$ und $j^2 = -1$ eine \mathbb{C} -Algebra. Mit dieser Basis hat man den Standardisomorphismus

$$\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{H}, \quad (a, b) \mapsto a + bj = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

1.4. Clifford-Algebren und Spinorgruppen

Die Diskussion dieses Abschnitts orientiert sich an der Diskussion von Atiyah, Bott und Shapiro (1964). Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} und $Q: V \rightarrow \mathbb{K}$ eine quadratische Form. Die *Clifford-Algebra* $C(Q)$ ist eine (assoziative) \mathbb{K} -Algebra mit 1 und einer linearen Abbildung $i = i_Q: V \rightarrow C(Q)$, der *Strukturabbildung*, für die $i^2(x) = Q(x) \cdot 1$ für jedes $x \in V$ gilt; zusätzlich genügt $C(Q)$ der *universellen Eigenschaft*:

Ist A eine beliebige \mathbb{K} -Algebra mit 1 und ist $j: V \rightarrow A$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $j^2(x) = Q(x) \cdot 1$ für jedes $x \in V$, so existiert ein eindeutiger Homomorphismus κ_j von \mathbb{K} -Algebren, der folgendes Diagramm kommutieren läßt:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & A \\ \downarrow i & \searrow \kappa_j & \\ C(Q) & & \end{array}$$

Wir können die Clifford-Algebra $C(Q)$ mit der kanonischen Abbildung $i: V \rightarrow C(Q)$ konstruieren, indem wir eine Tensor-Algebra T von V durch

$$T = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} V^{(\nu)}, \quad V^{(0)} = \mathbb{K}, \quad V^{(1)} = V, \quad V^{(\nu)} = V \otimes \dots \otimes V,$$

definieren. Multiplikation in T wird durch $a \cdot b = a \otimes b$ für $a \in V^{(\nu)}$, $b \in V^{(\mu)}$ induziert. Dann ist $a \otimes b \in V^{(\nu+\mu)}$. Sei $I(Q) \subset T$ das durch die Elemente $\{x \otimes x - Q(x)\mid x \in V\}$ erzeugte Ideal von T . Dann ist $C(Q) = T/a$, und die Strukturabbildung ist die Hintereinanderschaltung

$$i: V \hookrightarrow T \rightarrow T/I(Q)$$

Sei nun $t: C(Q) \rightarrow C(Q)$, $x \mapsto x^t$, der kanonische Anti-Automorphismus, für den gilt $(x \cdot y)^t = y^t \cdot x^t$ und $t^2 = \text{id}$. Da jedes $x \in C(Q)$ (wenn auch nicht eindeutig) als eine Linearkombination der Form $x = x_1 \cdot \dots \cdot x_k$, $x_\nu \in i(V)$, ausgedrückt werden kann, wird t wegen $x^t = (x_1 \cdot \dots \cdot x_k)^t = x_k \cdot x_{k-1} \cdot \dots \cdot x_1$ vollständig bestimmt. Sei analog $\alpha: C(Q) \rightarrow C(Q)$ ein kanonischer Automorphismus mit den Eigenschaften $\alpha^2 = \text{id}$ und $\alpha(x) = -x$ für $x \in i(V)$, d. h. $\alpha(x_1 \cdot \dots \cdot x_k) = (-1)^k(x_1 \cdot \dots \cdot x_k)$ für $x_\nu \in i(V)$.

Definieren wir nun die *Konjugation* auf $C(Q)$ durch

$$t\alpha = \alpha t: C(Q) \rightarrow C(Q), \quad \text{bezeichnet mit } x \mapsto \bar{x}.$$

Dies ist ein Anti-Automorphismus. Sei $C(Q)^\times$ die Einheitengruppe von $C(Q)$, und sei

$$\Gamma(Q) = \{ x \in C(Q)^\times \mid \alpha(x) \cdot v \cdot x^{-1} \in V \ \forall v \in V \}$$

die Untergruppe von $C(Q)^\times$, die *Clifford-Gruppe* von Q . Die Abbildung

$$N: C(Q) \rightarrow C(Q), \quad x \mapsto x \cdot \bar{x},$$

heißt die *Norm* von $C(Q)$. Somit gilt für $x \in V$ $N(x) = -Q(x) \cdot 1$. Beachte, daß $\alpha t = t\alpha$ auf V und damit auf ganz $C(Q)$ gilt, und daß $\Gamma(Q)$ eine Gruppe ist, da α ein Automorphismus (und V endlich-dimensional) ist.

1.4.1. Lemma. Die Abbildungen α und t induzieren einen Automorphismus und einen Anti-Automorphismus auf der Clifford-Gruppe $\Gamma(Q)$.

Beweis. Die Abbildungen sind $\pm \text{id}$ auf V . Falls $\alpha(x)v x^{-1} \in V \ \forall v \in V$, so folgt daher

$$\alpha(\alpha(x)) \cdot v \cdot \alpha(x)^{-1} = -\alpha(\alpha(x)) \cdot \alpha(v) \cdot \alpha(x)^{-1} = -\alpha(\alpha(x) \cdot v \cdot x^{-1}) = \alpha(x) \cdot v \cdot x^{-1} \in V,$$

also ist $\alpha(x) \in \Gamma(Q)$. Analog gilt für t

$$\alpha t(x) \cdot v \cdot t(x)^{-1} = t\alpha(x) \cdot t v \cdot t(x)^{-1} = t(x^{-1} \cdot v \cdot \alpha(x)) \in V$$

für jedes $v \in V$, da $\Gamma(Q)$ als Gruppe Inverse enthält und $\alpha \Gamma(Q)$ invariant läßt. \square

Für $\nu = 0, 1$ sei $C(Q)^\nu$ der Eigenraum für den Eigenwert $(-1)^\nu$ von α , d. h. $C(Q)^\nu = \{ x \in C(Q) \mid \alpha(x) = (-1)^\nu x \}$, und es gilt

$$C(Q) = C(Q)^0 \oplus C(Q)^1$$

als direkte Summe von Vektorräumen. Dies ist eine \mathbb{Z}_2 -Graduierung. Sind zwei Algebren in diesem Sinne \mathbb{Z}_2 -graded, $A = A^0 \oplus A^1$, $B = B^0 \oplus B^1$, so ist das *graduierete Tensorprodukt* $A \hat{\otimes} B$ definiert durch

$$(A \hat{\otimes} B)^0 = (A^0 \otimes B^0) \oplus (A^1 \otimes B^1)$$

$$(A \hat{\otimes} B)^1 = (A^0 \otimes B^1) \oplus (A^1 \otimes B^0)$$

mit der Multiplikation

$$(a' \otimes b) \cdot (a \otimes b') = (-1)^{\nu\mu} (a \cdot a') \otimes (b \cdot b')$$

für $a \in A^\mu$ und $b \in B^\mu$. $A \hat{\otimes} B$ ist wieder eine \mathbb{Z}_2 -graduierete Algebra.

Sei $V = V_1 \oplus V_2$ eine orthogonale Zerlegung eines Vektorraums mit Bilinearform Q , und sei Q_i die Einschränkung von Q auf V_i . Dann ist

$$C(Q) \cong C(Q_1) \hat{\otimes} C(Q_2).$$

Siehe Atiyah, Bott und Shapiro (1964).

Wir gehen nun über zu den speziellen Algebren $C_n = C_n(\mathbb{K})$, die die Clifford-Algebren $C(Q)$ zu den Vektorräumen $V = \mathbb{K}^n$ mit der quadratischen Form $Q: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$,

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto -x_1^2 - \dots - x_n^2 \quad (1.37)$$

und der kanonischen Basis e_1, \dots, e_n sind. Die Beziehungen im Ideal $I(Q)$ besagen dann

$$e_k^2 = -1, \quad e_k e_l = -e_l e_k \quad \text{für } k \neq l, \quad (1.38)$$

wie man leicht aus $(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)^2 = -(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)$ folgert. Speziell ist $C_0 = \mathbb{K}$, wie man sofort sieht, und $C_2 \cong \mathbb{H}(\mathbb{K})$, denn die lineare Abbildung $C_2 \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{K})$, $e_j \mapsto -i\sigma_j$, $j=1, 2$, ist Isomorphismus. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $C_1 \cong \mathbb{C}$ ($e_1 \mapsto i$), und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $C_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{H}(\mathbb{R})$ ($e_1 \mapsto j$).

Die Strukturabbildung $i_Q: V \rightarrow C(Q)$ ist injektiv, d. h. V kann angesehen werden als ein Unterraum von $C(Q)$ via dieser Abbildung. Bilden e_1, \dots, e_n eine Basis von V , so bilden die Produkte $e_{\nu_1} \dots e_{\nu_k}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_k \leq n$, und das Element 1 eine Basis des \mathbb{K} -Vektorraums $C(Q)$. Insbesondere liefern die Gleichungen (1.38) eine vollständige Relationenmenge für diese Produkte, und $C(Q)$ hat die Dimension

$$\dim_{\mathbb{K}} C_n = 2^n.$$

Es ist

$$C_n = C_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} C_1$$

(n Faktoren). Sei Γ_n die Clifford-Gruppe der Algebra C_n , d. h. $\Gamma_n = \{x \in C_n^\times \mid \alpha(x)\mathbb{K}^n x^{-1} \subset \mathbb{K}^n\}$, und sei $\varrho: \Gamma_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{K}^n) = GL(n, \mathbb{K})$ der durch

$$\varrho(x)v = \alpha(x)v x^{-1} \quad \text{für } x \in \Gamma_n \text{ und } v \in \mathbb{K}^n. \quad (1.39)$$

gegebene Gruppenhomomorphismus. Nennen wir ihn nach Atiyah, Bott und Shapiro (1964) *twist-adjungierte Darstellung (twisted adjoint representation)* von Γ_n .

1.4.2. Lemma. Der Kern der Abbildung $\varrho: \Gamma_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{K}^n)$ ist \mathbb{K}^\times , die multiplikative Gruppe der \mathbb{K} -Vielfachen von $1 \in C_n$.

Beweis. Sei $x \in \ker(\varrho)$. Per definitionem ist dann $\alpha(x) \cdot v = v \cdot x$ für jedes $v \in \mathbb{R}^n$. Mit $x = x^0 + x^1$, $x^\nu \in C_n^\nu$, wobei $C_n = C_n^0 \oplus C_n^1$, läßt sich diese Gleichung umschreiben zu

$$x^0 v = v x^0 \quad \text{und} \quad -x^1 v = v x^1. \quad (1.40)$$

Nun kann x^0 mit der kanonischen Basis auch durch $x^0 = a^0 + e_1 b^1$, $a^0 \in C_n^0$, $b^1 \in C_n^1$, ausdrücken, wobei weder a^0 noch b^1 den Faktor e_1 enthalten. Wendet man die erste Beziehung in (1.40) nun auf $v = e_1$, so erreicht man

$$a^0 + e_1 b^1 = e_1^{-1}(a^0 + e_1 b^1)e_1.$$

Da jedes Monom a^0 geraden Grad hat und keinen Faktor e_1 enthält, ist $a^0 e_1 = e_1 a^0$. Entsprechend $b^1 e_1 = -e_1 b^1$; also ist $a^0 + e_1 b^1 = a^0 - e_1 b^1$, d. h. $e_1 b^1 = 0$, und x enthält keinen Faktor e_1 . Sukzessive angewandt auf den Rest der Basis e_ν liefert dieses Argument, daß x als Linearkombination von Monomen ausgedrückt werden kann, die keinen Faktor e_ν enthalten. Doch das bedeutet $x^0 \in \mathbb{K} \cdot 1$. Geht man mit der zweiten Gleichung in (1.40) ähnlich vor, wird aus $x^1 = a^1 + e_1 b^0$ und $v = e_1$

$$a^1 + e_1 b^0 = -e_1^{-1} a^1 e_1 - b^0 e_1 = a^1 - e_1 b^0.$$

Also ist $b^0 = 0$ und $x^1 \in \mathbb{R}$. Wegen $\mathbb{R} \subset C_n^0$, d. h. $x^1 = 0$. Also ist $x = x^0 \in \mathbb{R} \cap \Gamma_n = \mathbb{R}^\times$. \square

1.4.3. Lemma. Ist $x \in \Gamma_n$, so ist $N(x) \in \mathbb{K}^\times$.

Beweis. Man berechnet, daß $N(x)$ im Kern von ϱ liegt, d. h. $N(x)$ operiert trivial auf \mathbb{K}^n . Für $x \in \Gamma_n$ folgt $\alpha(x)v x^{-1} \in \mathbb{K}^n$ für jedes $v \in \mathbb{K}^n$. Wendet man darauf t an, so folgt weiter $t(x)^{-1} \cdot v \cdot t\alpha(x) = \alpha(x)v x^{-1}$, da t die auf \mathbb{K}^n die Identität ist. Somit gilt $v = t(x)\alpha(x) \cdot v \cdot (t\alpha(x) \cdot x)^{-1} = \alpha(\bar{x}x) \cdot v \cdot (\bar{x}x)^{-1}$, d. h. $\bar{x}x \in \ker(\varrho)$; dasselbe folgt durch Lemma (1.4.1) für $\bar{x}x = \bar{\bar{x}}\bar{x}$. \square

1.4.4. Lemma. $N|_{\Gamma_n}: \Gamma_n \rightarrow \mathbb{K}^\times$ ist ein Homomorphismus, und es ist $N(\alpha(x)) = N(x)$.

Beweis. $N(xy) = xy\bar{y}\bar{x} = xN(y)\bar{x} = x\bar{x}N(y) = N(x)N(y)$, wobei die dritte Gleichung gilt, da $N(y) \in \mathbb{K}^\times$, dem Zentrum von Γ_n . $N(\alpha x) = \alpha(x)\alpha(\bar{x}) = \alpha(x\bar{x}) = \alpha N(x) = N(x)$. \square

Sei

$$\text{Null} = \text{Null}(\mathbb{K}) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid N(x) = 0\}$$

die Menge der isotropen Vektoren aus \mathbb{K}^n .

1.4.5. Lemma. Es gilt $\mathbb{K}^n \setminus \text{Null} \subset \Gamma_n$. Für $x \in \mathbb{K}^n \setminus \text{Null}$ ist $\varrho(x)$ die Spiegelung an der zu x orthogonalen Hyperebene. Insbesondere ist $\varrho(\Gamma_n) \subset \mathcal{O}(n, \mathbb{K})$.

Beweis. Für $x \in \mathbb{K}^n \setminus \text{Null}$ können wir eine Basis von \mathbb{K}^n so wählen, daß $x = N(x)e_1$. Mit Lemma (1.4.2) folgt $\varrho(N(x)e_1) = \varrho(e_1)$. Man kann also o. B. d. A. annehmen, daß $x = e_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varrho(e_1)e_1 &= \alpha(e_1)e_1e_1^{-1} = -e_1 \\ \varrho(e_1)e_\nu &= \alpha(e_1)e_\nu e_1^{-1} = -e_1e_\nu e_1^{-1} = e_\nu e_1 e_1^{-1} = e_\nu, \quad \nu \neq 1. \end{aligned}$$

Dies ist eine Spiegelung. Sei jetzt $x \in \Gamma_n$, und sei $v \in \mathbb{K}^n \setminus \text{Null}$. Dann ist $N(\varrho(x)v) = N(\alpha(x)v x^{-1}) = N(\alpha(x))N(v)N(x^{-1}) = N(x)N(v)N(x^{-1}) = N(v)$, d. h. $\varrho(x) \in \mathcal{O}(n, \mathbb{K})$. \square

Sei für $n \geq 1$

$$\text{Pin}(n, \mathbb{K}) := \ker(N: \Gamma_n \rightarrow \mathbb{K}^\times) \subset \Gamma_n. \quad (1.41)$$

1.4.6. Lemma. Für $q \in \text{Pin}(n, \mathbb{K})$ gilt $\varrho(q)v = qvq^t$ für jedes $v \in \mathbb{K}^n$.

Beweis. Da $q \in \Gamma_n$ ist und $tv = v \forall v \in \mathbb{K}^n$, folgt $qvq^t = t(qv^t q^t) = t(qvq^t) = -\alpha(qvq^t) = -\alpha(q)\alpha(v)\alpha(q^t) = \alpha(q)v\bar{q}$. Da für $q \in \text{Pin}(n, \mathbb{K})$ die Norm $N(q) = 1$ ist, folgt $q\bar{q} = 1$, d. h. $\bar{q} = q^{-1}$. Damit folgt die Behauptung. \square

Damit läßt sich $\text{Pin}(n, \mathbb{K})$ auch darstellen als

$$\text{Pin}(n, \mathbb{K}) = \{q \in \Gamma_n \mid \varrho(q)v = qvq^t \in \mathbb{K}^n \forall v \in \mathbb{K}^n\}.$$

1.4.7. Satz. Sei $n \geq 1$. Die Einschränkung $\varrho|_{\text{Pin}(n, \mathbb{K})}$, hat das Bild $O(n, \mathbb{K})$, und der Kern ist \mathbb{Z}_2 , erzeugt von $-1 \in \text{Pin}(n, \mathbb{K}) \subset \Gamma_n \subset C_n$. Somit hat man die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Pin}(n, \mathbb{K}) \xrightarrow{\varrho} O(n, \mathbb{K}) \longrightarrow 1.$$

Beweis. Jede orthogonale Transformation $A \in O(n, \mathbb{K})$ ist ein Produkt von k Spiegelungen für ein $k \leq n$, Satz (1.2.6). Wegen Lemma (1.4.5) sind aber alle Spiegelungen im Bild von $\varrho|_{\text{Pin}(n, \mathbb{K})}$, und für den Kern gilt $\ker(\varrho|_{\text{Pin}(n, \mathbb{K})}) = \ker(\varrho) \cap \ker(N) = \{t \in \mathbb{K}^\times \mid N(t) = 1\} = \{1, -1\}$. \square

$\text{Pin}(n, \mathbb{K})$ hat als Lie-Gruppe eine wohldefinierte Struktur, so daß ϱ ein Lie-Gruppenhomomorphismus und eine doppelte Überdeckung ist. Ferner ist die *Spinorgruppe* über \mathbb{K} definiert als das Urbild der speziellen orthogonalen Transformationen $SO(n, \mathbb{K})$ der Abbildung $\varrho: \text{Pin}(n, \mathbb{K}) \rightarrow O(n, \mathbb{K})$, d. h.

$$\text{Spin}(n, \mathbb{K}) = \varrho^{-1}(SO(n, \mathbb{K})). \quad (1.42)$$

Es gibt also eine exakte Sequenz von Lie-Gruppen

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Spin}(n, \mathbb{K}) \xrightarrow{\varrho} SO(n, \mathbb{K}) \longrightarrow 1. \quad (1.43)$$

Der komplexe Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Für $n=1$ ist $C_1 = \mathbb{C}(j)$ (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $C_1 = \mathbb{C}$), und $\Gamma_1 = \{z \in C_1^\times \mid \bar{z}(j\mathbb{K})z^{-1} \subset j\mathbb{C}\} = (\mathbb{K} \cup j\mathbb{C}) \setminus \{0\}$. Also ist $\text{Pin}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{Z}_4$, erzeugt von j , und $\text{Spin}(1, \mathbb{C}) = \{\pm 1\} = \mathbb{Z}_2$, $SO(1, \mathbb{C}) = SO(1) = \{1\}$.

1.4.8. Lemma. Für $n \geq 2$ ist der Homomorphismus $\varrho: \text{Spin}(n, \mathbb{C}) \rightarrow SO(n, \mathbb{C})$ eine zweifache Überlagerung.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß es einen Weg in $\text{Pin}(n, \mathbb{C})$ gibt, der die Elemente 1 und -1 verbindet, die den Kern von ϱ erzeugen. So ein Weg ist z. B.

$$w: t \mapsto \cos t + \sin t \cdot e_1 \cdot e_2, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Es gilt $w(t)^{-1} = \bar{w}(t) = \cos t - \sin t \cdot e_1 \cdot e_2$, also $w(t) \in \text{Pin}(n, \mathbb{C})$. Da $\varrho w(t)$ für jedes t in einer zusammenhängenden Wegkomponente von $O(n, \mathbb{C})$ bleibt, und $\varrho w(0) = 1 \in SO(n, \mathbb{C})$, ist $w(t) \in \text{Spin}(n, \mathbb{C})$ für jedes t . \square

1.4.9. Korollar. Für $n \geq 3$ ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(SO(n, \mathbb{C}))$ isomorph zu \mathbb{Z}_2 . Damit ist $\text{Spin}(n, \mathbb{C})$ einfach zusammenhängend, und $\varrho: \text{Spin}(n, \mathbb{C}) \rightarrow SO(n, \mathbb{C})$ ist die universelle Überlagerung.

Beweis. Korollar (1.1.9), Lemma (1.1.11) und Gleichung (1.36). \square

Da mit Bemerkung (1.3.8) $SL(2, \mathbb{C}) \cong Q_{\mathbb{C}}$ die universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3, \mathbb{C})$ ist, gilt

$$\text{Spin}(3, \mathbb{C}) \cong Q_{\mathbb{C}}. \quad (1.44)$$

D. h. die Überlagerung (1.26) $\pi: Q_{\mathbb{C}} \rightarrow SO(3, \mathbb{C})$,

$$\pi_q(x) = qxq^{-1} \quad \text{für } q \in Q_{\mathbb{C}} \text{ und } x \in \mathbb{C}^3$$

ist dieselbe wie die twist-adjungierte Darstellung von Γ_3 aus Gleichung (1.39), $\varrho: \text{Spin}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}(3, \mathbb{C})$. Man hat nun die Algebra-Inklusion

$$\kappa: \mathbb{H}(\mathbb{C}) \rightarrow C_2(\mathbb{C}), \quad (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \mapsto (e_2 e_3, e_3 e_1, e_1 e_2), \quad (1.45)$$

($\mathbb{H}(\mathbb{C}) = C_2(\mathbb{C})!$), die sich auf einen injektiven Homomorphismus $\kappa: \mathbb{H}(\mathbb{C})^\times \rightarrow \Gamma_3$ einschränken läßt, der die Norm erhält und verträglich mit den jeweiligen orthogonalen Operationen des \mathbb{C}^3 (bzw. des $\mathbb{H}(\mathbb{C})_{\text{pur}} \cong \mathbb{C}^3$) ist. Also kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}(\mathbb{C})^\times \times \mathbb{H}(\mathbb{C})_{\text{pur}} & \longrightarrow & \mathbb{H}(\mathbb{C})_{\text{pur}} \\ \kappa \times \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \Gamma_3 \times \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \end{array}$$

Hierbei ist $\lambda: \mathbb{H}(\mathbb{C})_{\text{pur}} \rightarrow \mathbb{C}^3$, $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \mapsto (e_1, e_2, e_3)$, der natürliche Isomorphismus, und die horizontalen Pfeile stellen die entsprechenden orthogonalen Operationen des \mathbb{C}^3 dar. Die Einschränkung von κ auf Elemente der Norm 1 liefert einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\kappa: Q_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Spin}(3, \mathbb{C})$. Wegen (1.44) ist dies ein Isomorphismus. Es folgt

$$\pi = \varrho \circ \kappa.$$

1.4.20. Bemerkung. Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{so}(1, 3)$ von $Q_{\mathbb{C}}$ ist als Vektorraum betrachtet der Tangentialraum von $S_{\mathbb{C}}^3 \subset \mathbb{H}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^4$, $S_{\mathbb{C}}^3 \cong S^3 \times \mathbb{R}^3$, am Punkt $1 = (1, 0)$. Er ist also der Raum der reinen komplexen Quaternionen, das Komplement \mathbb{C}^3 von $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Als ein komplexer Vektorraum wird die Lie-Algebra durch die drei Pauli-Matrizen σ_i , $i = 1, 2, 3$, bzw. durch $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{H} \subset \mathbb{H}(\mathbb{C})$, erzeugt.

1.5. Spinoren

Durch die Isomorphie (1.34) ist jedem Einheitsquaternion $q \in Q_{\mathbb{C}}$ eine Matrix $L \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ zugeordnet; entspricht q einer Drehung um eine nichtisotrope Achse, so existiert genau ein Einheitsvektor $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$, so daß $q = e^{-i\tau \sigma_{\mathbf{u}}/2}$ ist; dies ist mit (1.35) bzw. (1.33) die Matrix $L = L(\tau) \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$,

$$L = \begin{bmatrix} \cos \frac{\tau}{2} - i \sin \frac{\tau}{2} u_3 & -(u_2 + i u_1) \sin \frac{\tau}{2} \\ (u_2 - i u_1) \sin \frac{\tau}{2} & \cos \frac{\tau}{2} + i \sin \frac{\tau}{2} u_3 \end{bmatrix}. \quad (1.46)$$

Der Inversen $q^{-1} = \bar{q}$ entspricht $L(\tau)^{-1} = L(-\tau)$. Damit entspricht eine Rotation $R(\tau) \in \text{SO}(3, \mathbb{C})$, bzw. eine Lorentz-Transformation $\Lambda(t, \vartheta) \in \text{SO}^+(1, 3)$, $\vartheta + it = \tau$, einer Transformation $L \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$:

$$\mathbf{z}' = R(\tau) \mathbf{z} \Leftrightarrow \sigma_{\mathbf{z}'} = L \sigma_{\mathbf{z}} L^{-1} \quad (1.47)$$

mit $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbb{C}^3$. In Komponentenschreibweise und mit der Einsteinschen Summenkonvention (d. h. über doppelt auftretende Indizes wird summiert) ist dies mit $\mathbf{z}' = z'^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$, $\mathbf{z} = z^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$, wobei $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis des \mathbb{C}^3 ist, und mit $R = (R^{\alpha}_{\beta})_{\alpha\beta}$, d. h. $z'^{\alpha} = R^{\alpha}_{\beta} z^{\beta}$,

$$\sigma_{z'} = z'^{\alpha} \sigma_{\alpha} = R^{\alpha}_{\beta} z^{\beta} \sigma_{\alpha} = L z^{\beta} \sigma_{\beta} L^{-1} = L \sigma_z L^{-1}.$$

Es folgt

$$R^{\alpha}_{\beta} \sigma_{\alpha} = L \sigma_{\beta} L^{-1} \quad \text{oder} \quad R^{\alpha}_{\beta} = -\text{tr} L \sigma_{\beta} L^{-1} \vartheta^{\alpha}, \quad (1.48)$$

$\vartheta^{\alpha} := \sigma_{\alpha}$. Man sieht hier explizit, daß L und $-L$ dieselbe Drehung darstellen.

Die universelle Überlagerungsgruppe $SL(2, \mathbb{C})$ von $SO(3, \mathbb{C}) \cong SO^+(1, 3)$ wirkt auf den zweidimensionalen komplexen Vektorraum \mathbb{C}^2 mit den Spaltenvektoren

$$\phi_{\mathbb{R}} = \xi = \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

wobei $\xi^0, \xi^1 \in \mathbb{C}$ die Komponenten bezüglich der Basis

$$o = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \iota = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

sind. Die Bezeichnung $\phi_{\mathbb{R}}$ geht auf Ryder (1985) [p. 43 ff] zurück. Für einen transformierten Vektor $\tilde{\xi} \in \mathbb{C}^2$ gilt also

$$\tilde{\xi} = L \xi \quad (1.51)$$

für eine Matrix $L \in SL(2, \mathbb{C})$. In Indexschreibweise lautet diese Gleichung

$$\tilde{\xi}^A = L^A_B \xi^B, \quad (1.51')$$

wobei $A, B = 0, 1$, und

$$L = \begin{pmatrix} L^0_0 & L^0_1 \\ L^1_0 & L^1_1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (1.52)$$

Gesucht ist nun ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, so daß $SL(2, \mathbb{C})$ isometrisch auf \mathbb{C}^2 wirkt.

Zunächst ist zu bemerken, daß $SL(2, \mathbb{C})$ von den drei Matrizen

$$g_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2(z) = \begin{pmatrix} e^{iz} & 0 \\ 0 & e^{-iz} \end{pmatrix}, \quad g_3(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{C}), \quad (1.53)$$

erzeugt wird, siehe z. B. Carmeli (1977). Bereits mit der Transformation $g_2(z)$ für ein $z \neq 0$ sieht man, daß das Skalarprodukt symplektisch sein muß. Sei es also durch

$$(\xi, \xi')_{\mathbb{R}} = \xi^0 \xi'^1 - \xi^1 \xi'^0 \quad (1.54)$$

definiert. Dann gilt für $j=1, 2, 3$ sowie $\tilde{\xi} = g_j(z) \xi$ und $\tilde{\xi}' = g_j(z) \xi' \in \mathbb{C}^2$

$$(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}') = (\xi, \xi').$$

1.5.1. Definition. Der komplexe Vektorraum $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}} = (\mathbb{C}^2, (\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}})$ heißt *Spinorraum 1. Art*, und seine Vektoren heißen *Spinoren (1. Art)*. Die Lie-Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ wirkt von links isometrisch auf $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}$.

Anders formuliert lautet (1.54)

$$(\xi, \xi')_{\mathbb{R}} = \varepsilon_{AB} \xi^A \xi'^B,$$

wobei

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon^{AB} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

der ε -Spinor ist. Mit der Definition

$$\xi_A := \varepsilon_{AB} \xi^B \quad (1.56)$$

kann man mit Hilfe des ε -Spinors Indizes von Spinoren hinauf- und herabziehen. Damit spielt der ε -Spinor in der Spinorraum-Geometrie dieselbe fundamentale Rolle wie der metrische Tensor g_{ij} in der pseudo-Riemannschen Geometrie. Daher wird er auch *metrischer Spinor* genannt. Dann gilt für das Skalarprodukt

$$\xi^A \xi'_A = \varepsilon_{AB} \xi^A \xi'^B = (\xi, \xi')_{\mathbf{R}}.$$

Analog betrachten wir nun den komplexen Vektorraum \mathbb{C}^2 , auf den $SL(2, \mathbb{C})$ von rechts wirkt, d. h. den Raum der Zeilenvektoren

$$\phi_{\mathbf{L}} = \eta = (\eta^{0'}, \eta^{1'}), \quad (1.57)$$

wobei $\eta^{0'}, \eta^{1'} \in \mathbb{C}$ die Komponenten von η bezüglich der Basis

$$o' = (1, 0), \quad i' = (0, 1) \quad (1.58)$$

sind. Ferner sei nun das symplektische Skalarprodukt

$$(\eta, \tilde{\eta})_{\mathbf{L}} = \eta^{A'} \tilde{\eta}_{A'} = \varepsilon_{A'B'} \eta^{A'} \tilde{\eta}^{B'}$$

gegeben, wobei

$$\varepsilon_{A'B'} = \varepsilon_{AB} \quad (1.59)$$

der ε -Spinor ist.

1.5.2. Definition. Der komplexe Vektorraum $\mathfrak{S}_{\mathbf{L}} = (\mathbb{C}^2, (\cdot, \cdot)_{\mathbf{L}})$ heißt *Spinorraum 2. Art*, und seine Vektoren heißen *Spinoren 2. Art*. Die Lie-Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ wirkt durch Rechtsmultiplikation und isometrisch auf $\mathfrak{S}_{\mathbf{L}}$.

Der Zusammenhang zwischen Spinoren und Vektoren.

a) Die Cartan-Konstruktion

Betrachten wir den Raum der Paare von Spinoren 1. und 2. Art, $(\xi, \eta) \in \mathfrak{S}_{\mathbf{R}} \times \mathfrak{S}_{\mathbf{L}}$. Durch die Basis $(o, o'), (i, i'), (o, i') + (i, o')$, läßt sich ein dreidimensionaler Vektorraum $\mathfrak{S}_{\mathbf{RL}} \subset \mathfrak{S}_{\mathbf{R}} \times \mathfrak{S}_{\mathbf{L}}$ ($\dim \mathfrak{S}_{\mathbf{R}} \times \mathfrak{S}_{\mathbf{L}} = 4$) konstruieren mit den Komponenten $(\xi^0 \eta^{0'}, \xi^1 \eta^{1'}, \xi^0 \eta^{1'} + \xi^1 \eta^{0'}) \in \mathbb{C}^3$. Diesen Vektor kann man z. B. als spurfreie komplexe 2×2 -Matrix

$$Z = \begin{bmatrix} -Z^{0i'} & Z^{00'} \\ Z^{1i'} & Z^{01'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi^0 \eta^{1'} - \xi^1 \eta^{0'} & 2\xi^0 \eta^{0'} \\ -2\xi^1 \eta^{1'} & \xi^0 \eta^{1'} + \xi^1 \eta^{0'} \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

darstellen, deren Einträge von den drei Komponenten des Vektors abgeleitet sind.

Man kann nun die Basen des Spinorraums 2. Stufe und der reinen komplexen Quaternionen, $(o, o'), (i, i'), (o, i') + (i, o') \in \mathfrak{S}_{\mathbf{RL}}$ und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathbb{H}(\mathbb{C})_{\text{pur}}$, miteinander identifizieren, so daß mit (1.29) $Z = \sigma_{\mathbf{z}} \in \mathbb{H}(\mathbb{C})_{\text{pur}}$ für ein $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ ist, d. h.

$$\left. \begin{aligned} \xi^0 \eta^{1'} + \xi^1 \eta^{0'} &= -z_3, & 2\xi^0 \eta^{0'} &= z_1 - iz_2, & -2\xi^1 \eta^{1'} &= z_1 + iz_2, \\ z_1 &= \xi^0 \eta^{0'} - \xi^1 \eta^{1'}, & z_2 &= i(\xi^0 \eta^{0'} + \xi^1 \eta^{1'}), & z_3 &= -\xi^0 \eta^{1'} - \xi^1 \eta^{0'}, \end{aligned} \right] \quad (1.61)$$

bzw.

$$z_\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(Z \sigma_\alpha).$$

Weiter gilt

$$\det Z = -(\xi^0 \eta^{1'} - \xi^1 \eta^{0'})^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2. \quad (1.62)$$

Daher liegt es nahe, auf $\mathfrak{S}_{\mathbf{RL}}$ ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{RL}}: \mathfrak{S}_{\mathbf{RL}} \times \mathfrak{S}_{\mathbf{RL}} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(V, W)_{\mathbf{RL}} = \frac{1}{4} (\det(V+W) - \det(V-W)) \quad (1.63)$$

zu definieren ($(Z, Z)_{\mathbf{RL}} = \det Z$).

1.5.3. Definition. Der Vektorraum $\mathfrak{S}_{\mathbf{RL}} \cong \mathbb{H}(\mathbb{C})_{\text{pur}}$ mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{RL}}$ heißt *Cartanscher Spinorraum 2. Stufe*, seine Vektoren $Z \in \mathfrak{S}_{\mathbf{RL}}$ heißen *Cartansche Spinoren 2. Stufe*.

$SL(2, \mathbb{C})$ wirkt auf $\mathfrak{S}_{\mathbf{RL}}$ durch

$$\tilde{Z} = LZL^{-1}, \quad L \in SL(2, \mathbb{C}), \quad (1.63)$$

denn durch einfaches Nachrechnen mit Hilfe der Beziehung $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ in $SL(2, \mathbb{C})$ sieht man, daß mit Z auch \tilde{Z} eine spurfreie Matrix ist. Da $\det L = \det L^{-1} = 1$, gilt $(\tilde{V}, \tilde{W})_{\mathbf{RL}} = (V, W)_{\mathbf{RL}}$ für $\tilde{V}, \tilde{W}, V, W \in \mathfrak{S}_{\mathbf{RL}}$ mit $\tilde{V} = LVL^{-1}, \tilde{W} = LWL^{-1}$. Somit gilt

1.5.4. Satz. $SL(2, \mathbb{C})$ wirkt durch Konjugation (1.63) isometrisch auf $\mathfrak{S}_{\mathbf{RL}}$.

Eine Besonderheit der Cartan-Spinoren ist die Beziehung

$$Z \cdot Z = E \cdot \det Z. \quad (1.64)$$

1.5.5. Beispiel (Cartan, 1938, und Klein und Sommerfeld, 1897)

Gilt für die Komponenten des Cartan-Spinors Z aus (1.60) $\xi^A = \eta^{A'}$, so folgt mit (1.61)

$$z_1 = (\xi^0)^2 - (\xi^1)^2, \quad z_2 = i((\xi^0)^2 + (\xi^1)^2), \quad z_3 = -2\xi^0 \xi^1.$$

Für den assoziierten Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3$ folgt $(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \det Z = 0$, d. h. er ist isotrop. Die ersten drei Gleichungen aus (1.61) lauten nun

$$\xi^0 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(z_1 - iz_2)}, \quad \xi^1 = \frac{z_1 + iz_2}{z_3} \xi^0.$$

Spinorfelder

Sei $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ mit

$$\partial_k := \frac{\partial}{\partial z_k}$$

der Gradientenoperator der holomorphen Funktionen $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$.

1.5.6. Definition. Der Operator

$$(\partial_{AB'})_{A,B=0,1} := \sigma_{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

heißt *spinorieller Gradientenoperator*.

Es gilt

$$\partial^{AC'} = \varepsilon^{AB} \varepsilon^{C'D'} \partial_{BD'}, \quad (1.66)$$

d. h.

$$(\partial^{AC'})_{A,C'} = \begin{bmatrix} \partial_{11'} & -\partial_{10'} \\ -\partial_{01'} & \partial_{00'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_3 & -\partial_1 - i\partial_2 \\ -\partial_1 + i\partial_2 & \partial_3 \end{bmatrix} = -(\sigma_{\nabla})^t,$$

und

$$\partial_{AB'} \partial^{AC'} = \partial_{0B'} \partial^{0C'} + \partial_{1B'} \partial^{1C'} = -\delta_{B'}^{C'} \Delta, \quad (1.67)$$

also als Matrix

$$(\partial_{AB'} \partial^{AC'})_{B',C'} = \begin{bmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{bmatrix} = -(\partial_{AB'})^2,$$

wobei

$$\Delta = \Delta_{\mathbb{C}} := \sum_{k=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial z_k^2}$$

der komplexifizierte Laplace-Operator ist (vgl. demgegenüber die gebräuchliche Definition von Δ z. B. in Fischer und Lieb, 1983, p. 91). Die einfachste Feldgleichung, die mit dem Spinoroperator gebildet werden kann, ist

$$\partial_{AB'} \phi^A = 0 \quad \text{bzw.} \quad \partial_{AB'} \psi^{B'} = 0, \quad (1.68)$$

d. h. in Matrixschreibweise

$$\begin{aligned} \sigma_{\nabla} \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^1 \end{pmatrix} &= 0, & (\psi^{0'}, \psi^{1'}) \sigma_{\nabla} &= 0, \\ \begin{bmatrix} \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^1 \end{pmatrix} &= 0, & (\psi^{0'}, \psi^{1'}) \begin{bmatrix} \overleftarrow{\partial}_3 & \overleftarrow{\partial}_1 - i\overleftarrow{\partial}_2 \\ \overleftarrow{\partial}_1 + i\overleftarrow{\partial}_2 & -\overleftarrow{\partial}_3 \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

wobei $\psi^{B'} \overleftarrow{\partial}_k := \partial_k \psi^{B'}$ und $\overleftarrow{\nabla} = (\overleftarrow{\partial}_1, \overleftarrow{\partial}_2, \overleftarrow{\partial}_3)$. Die Spinorfeldkomponenten sind hierbei holomorphe Funktionen, also $\phi^A, \psi^{A'}: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$, $A = 0, 1$. Jede der beiden Gleichungen (1.68) heißt (*modifizierte*) *Weyl-Gleichung*; die erste ist die Weyl-Gleichung für ein ungestrichenes Spinorfeld, d. h. für ein Feld erster Art, die zweite für ein gestrichenes Feld. Man sieht an der ersten Weyl-Gleichung, daß der spinorielle Gradient eines ungestrichenen Spinorfeldes ein gestrichenes Spinorfeld ist. Will man also Terme ohne Ableitung in der Differentialgleichung zulassen, so können diese nur Komponenten eines gestrichenen Spinorfeldes enthalten. Entsprechendes gilt für die zweite Weyl-Gleichung (1.68). Das einfachste geschlossene System ist somit die *Dirac-Gleichung*

$$\partial_{AB'} \phi^A = \frac{\chi}{i\sqrt{2}} \psi_{B'}, \quad \partial^{AC'} \psi_{C'} = \frac{\chi}{i\sqrt{2}} \phi^A \quad (1.69)$$

oder, in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^1 \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_{0'} \\ \psi_{1'} \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\partial_3 & -\partial_1 - i\partial_2 \\ -\partial_1 + i\partial_2 & \partial_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{0'} \\ \psi_{1'} \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^1 \end{pmatrix}.$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\nabla} & -\frac{\kappa}{i\sqrt{2}} \\ \frac{\kappa}{i\sqrt{2}} & (\sigma_{\nabla})^t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^1 \\ \psi_{0'} \\ \psi_{1'} \end{pmatrix} = 0.$$

Hierbei ist die Konstante $\kappa = \frac{mc}{\hbar}$ die reziproke Compton-Wellenlänge eines Teilchens der Masse m . Einsetzen der ersten in die zweite der Gleichungen (1.69) ergibt

$$\frac{i\sqrt{2}}{\kappa} \partial_{AB'} \partial^{AC'} \psi_{C'} = \frac{\kappa}{i\sqrt{2}} \psi_{B'}$$

d. h. mit (1.67)

$$(-2\Delta + \kappa^2) \psi_{B'} = 0. \quad (1.70a)$$

Analog folgt

$$(-2\Delta + \kappa^2) \phi^{A'} = 0. \quad (1.70b)$$

Allgemein gilt für eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Zerlegung in Real- und Imaginärteil $f(z_1, \dots, z_n) = u(z_1, \dots, z_n) + i v(z_1, \dots, z_n)$, $u, v: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$, und mit $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $k=1, \dots, n$, wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} &= \frac{\partial u}{\partial x_k} + i \frac{\partial v}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial z_k}, & \text{d. h.} & \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_k^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y_k} &= i \frac{\partial f}{\partial z_k}, & \text{d. h.} & \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_k^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial z_k^2}; \end{aligned}$$

s. hierzu Fischer und Lieb (1983) [p. 18ff] und Gunning (1990) [p. 4]. Damit folgt

$$2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_k^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y_k^2}.$$

Für $n=3$ und mit der Bezeichnung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} := \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} \quad (1.71)$$

($c = \text{const}$: Lichtgeschwindigkeit) und dem *d'Alembert-Operator*

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

lassen sich die Gleichungen (1.70a) und (1.70b) also umschreiben zu

$$(\square + \kappa^2) \psi = 0, \quad (1.72)$$

wobei $\psi = \phi^A$, $\psi_{B'}$, $A, B' = 0, 1$. Dies ist die *Klein-Gordon-Gleichung*. Mit der durch die kanonisierte Quantisierungsvorschrift gegebenen Zuordnung für Energie E und Impuls \mathbf{p} ,

$$E \leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \leftrightarrow -i\hbar \nabla$$

folgt daraus

$$\frac{1}{c^2} E^2 - p^2 = m^2 c^2$$

(mit $p^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$), die speziell relativistische Beziehung zwischen Energie und Impuls eines Vektors $(E, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^4$. Mit der nichtrelativistischen Näherung $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \approx mc^2 + p^2/2m + \dots$ ist dies die Newtonsche Energiegleichung $E_{\text{total}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$, die wiederum gemäß der kanonischen Quantisierung für die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = p^2/2m$ die *Schrödinger-Gleichung*

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta$$

ergibt.

(b) Die van der Waerdensche Konstruktion

Die gebräuchliche Zuordnung von Spinoren und 4-Vektoren, den *Weltvektoren*, die auf van der Waerden (1929) zurückgeht, stellt einen direkten Zusammenhang zwischen Spinorraum und Minkowski-Raum her. Sie nutzt die Tatsache aus, daß der Minkowski-Raum isomorph zum Vektorraum der Hermiteschen 2×2 -Matrizen

$$\text{Herm}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

ist, und zwar durch die Zuordnung mit Hilfe der *Infeld-van der Waerden-Symbole*

$$\begin{aligned} \sigma_0^{AB'} = \sigma_{AB'}^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \sigma_1^{AB'} = \sigma_{AB'}^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \sigma_2^{AB'} = -\sigma_{AB'}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, & \sigma_3^{AB'} = \sigma_{AB'}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

die bis auf den Faktor $\sqrt{2}$ die Pauli-Matrizen sind; vgl. Penrose und Rindler (1984) [p. 125]. Dann ist die Zuordnung $\mathbb{M} \rightarrow \text{Herm}(2)$,

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto X^{AB'} = x^j \sigma_j^{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix}.$$

eine Bijektion, d. h. $\mathbb{M} \cong \text{Herm}(2) \cong \mathbb{H}(\mathbb{R})$ als Vektorräume. Wegen $\det X = \eta_{ij} x^i x^j$ ist diese Abbildung sogar isometrisch. Definieren wir nun *a priori* den Spinraum $\mathbb{S}^{AB'}$ als die Menge der komplexen 2×2 -Matrizen $X^{AB'}$, $\mathbb{S}^{AB'} \cong M(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{H}(\mathbb{C})$, und $\mathbb{S}^{AA'} := \text{Herm}(2)$ der Raum der *Hermiteschen Spinoren (2. Stufe)*, $\mathbb{S}^{AA'} \subset \mathbb{S}^{AB'}$. $\mathbb{S}^{AB'} \cong \mathbb{C}^4$ hat die Basis oo', oi', io', ii' , $X^{AB'} = X^{00'} oo' + X^{01'} oi' + X^{10'} io' + X^{11'} ii'$, wobei

$$X^{AB'} = \begin{bmatrix} X^{00'} & X^{01'} \\ X^{10'} & X^{11'} \end{bmatrix}.$$

Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sigma_0^{AB'} &= oo' + ii' & \sigma_1^{AB'} &= oi' + io' \\ \sigma_2^{AB'} &= i(io' - oi') & \sigma_3^{AB'} &= oo' - ii'. \end{aligned}$$

Ferner gilt mit den Infeld-van der Waerden-Symbolen

$$x^a = X^{AB'} \sigma^a_{AB'}.$$

Jedem (komplexen) Weltvektor x^a entspricht also ein Spinor $X^{AB'}$ und umgekehrt. Ist der Weltvektor reell, so ist der Spinor Hermitesch und wird mit $X^{AA'}$ bezeichnet.

Analog der Behandlung der Cartan-Konstruktion kann man einen Spinoroperator durch

$$\partial_{AB'} = \sigma_{AB'} \partial_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \partial_0 + \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 \end{bmatrix} \quad (1.65')$$

Es gilt wörtlich (1.66), sowie

$$\begin{aligned} \partial_{AB'} \partial^{AC'} &= \frac{1}{2} \delta_{B'}^{C'} \square, \\ \partial_{AB'} \partial^{AC'} &= \frac{1}{2} \delta_{B'}^{C'} \square. \end{aligned} \quad (1.67')$$

Die Weyl-Gleichung (1.68) bleibt formal identisch, ebenso die Dirac-Gleichung

$$\partial_{AB'} \phi^A = \frac{\kappa}{i\sqrt{2}} \psi_{B'}, \quad \partial^{AC'} \psi_{C'} = \frac{\kappa}{i\sqrt{2}} \phi^A. \quad (1.69)$$

Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung ergibt mit (1.67') direkt die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + \kappa^2) \psi_{B'} = 0. \quad (1.72')$$

Bemerkung. Man sieht die der Alltagserfahrung scheinbar widersprechende Tatsache, daß $SO(3)$ nicht einfach zusammenhängend ist, auf zwei verschiedene Arten:

Erstens nämlich mit Hilfe der Quaternionendarstellung für die Rotation $R(\vartheta)$, bei der eine Rotation um 2π verschieden ist von der identischen Rotation, denn $R(0) = R(4\pi) \neq R(2\pi)$.

Zweitens durch die folgende Koordinatisierung, vgl. Dubrovin *et al.* (1984) oder Penrose und Rindler (1984): Jede Rotation des Euklidischen 3-Raums ist festgelegt durch ihre Rotationsachse und durch den Winkel φ , $\varphi \in [0, \pi]$, mit dem der Raum um die Achse gedreht wird. Wählen wir aus den zwei möglichen Drehrichtungen die im Gegenuhrzeigersinn, so ist ein Element aus $SO(3)$ vollständig bestimmt durch den Vektor $\vec{\varphi} \in \mathbb{R}^3$, dessen Richtung durch die Rotationsachse gegeben ist, und dessen Betrag $|\vec{\varphi}| \varphi$ ist. Somit ist jeder Punkt aus $SO(3)$ einem Punkt der abgeschlossenen Vollkugel mit Radius π , dem Raum \mathcal{B} , zugeordnet. Diese Zuordnung ist zunächst nicht eindeutig, denn eine Rotation um π unterscheidet sich nicht von einer um $-\pi$. Identifizieren wir die zwei diametral gegenüberliegenden Punkte auf dem Rand S der Kugel \mathcal{B} , so erhalten wir den Raum $\hat{\mathcal{B}}$. Diese Zuordnung ist bijektiv. Die Identität von $SO(3)$ ist der Mittelpunkt 0 der Kugel, und der Tangentialraum bei der Identität ist der gesamte 3-Raum. Betrachten wir nun einen geschlossenen Weg in $SO(3) \cong \hat{\mathcal{B}}$. Es gibt zwei disjunkte Wegeklassen, I und II, je nachdem ein Weg eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Schnittpunkten mit dem Rand S hat. Klasse I besteht aus allen Durchmessern durch $\hat{\mathcal{B}}$, und Klasse II aus allen inneren geschlossenen Kurven, insbesondere den »trivialen«, d. i. konstanten, Wegen, bestehend aus einem Punkt. In $SO(3)$ ist dies die 1, die identische Rotation. Kein Weg der Klasse I kann stetig in einen II-Weg verformt werden, da Schnittpunkte nur paarweise entstehen oder verschwinden können; andererseits können I-Wege in I-Wege und II-Wege in II-Wege verformt werden.

Eine stetige Rotation im Euklidischen Raum, die ein Objekt zurück in seine ursprüngliche Lage bringt, ist ein geschlossener Weg in $SO(3)$, und somit in \hat{B} . Ist die Rotation eine Vollandrehung um 2π , so ist dies offensichtlich ein Weg der Klasse I, wohingegen eine Drehung um 4π ein II-Weg ist. Das heißt, daß eine Rotation um 2π (bei der die ganze Bewegung betrachtet wird, nicht nur der Anfangs- und Endzustand) nicht stetig verformbar ist in einen konstanten Weg, also in die identische Rotation. Dagegen ist eine Rotation um 4π verformbar in die identische Rotation, also nullhomotop.

Die Frage stellt sich nun natürlich, ob dieses zunächst rein topologische Ergebnis überhaupt Entsprechung in unserer physikalischen Welt findet. Oder, wie Biedenharn und Louck (1981) fragen: Ist die Abbildung $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ physikalischer Rotationen in die topologische Gruppe $SO(3)$ bijektiv oder nicht (surjektiv ist sie sicherlich)? Ist also eine Rotation um 2π nicht doch *physikalisch äquivalent* zur identischen Rotation? Sie stellen heraus, daß das Konzept des *festen Körpers (solid body)*, d. h. eines undurchdringbaren Gebiets des Raumes, wesentlich für den *spinoriellen* Charakter (d. h. $R(2\pi) \neq R(4\pi) \simeq R(0) = 1$) makroskopischer Objekte auf dem klassischen (im Gegensatz zum quantenmechanischen) Level ist. Mathematisch entspricht der feste Körper einem *Koordinatensystem (coordinate frame)*. Dieses Konzept steht im Gegensatz zu demjenigen der *punktartigen* Objekte wie z. B. Vektoren oder physikalische Massenpunkte, bei denen eine Rotation um 2π nicht unterscheidbar ist von der identischen Rotation. Anhand von *Diracs Konstruktion*, bei der ein fester Körper durch ideal dehnbare Gummibänder mit einem fixen Referenzrahmen befestigt ist, läßt sich der Unterschied verdeutlichen: Nach einer Drehung um 2π (um eine beliebige Achse) verheddern sich die Gummibänder hoffnungslos; keine Manipulation kann sie entwirren (falls der Körper für die Bänder undurchdringlich ist, s. Fig. 1). Nach einer Rotation um 4π jedoch können die Bänder entwirrt werden, und die ursprüngliche Konfiguration ist wiederhergestellt, siehe Fig. 2. Mit Hilfe der Artinschen Theorie der *Zopfgruppen* kann man beweisen, daß die Minimalzahl von Gummibändern für die Unterscheidbarkeit der 2π -Drehung von der Identität drei ist, siehe Biedenharn und Louck (1981), p. 25; vgl. Fig. 3. Für weitere Beispiele und Erläuterungen siehe auch Penrose und Rindler (1984).

Diese Betrachtungen bleiben auch für die komplexen Rotationen des Euklidischen Vektorraums \mathbb{C}^3 gültig, denn nach Korollar 1.1.12 sind sie vom gleichen Homotopietyp wie die reellen Rotationen. Durch die Isomorphie der komplexen Rotationen mit den eigentlichen Lorentz-Transformationen überträgt sich die ganze Diskussion der Euklidischen orthogonalen Geometrie auf die pseudo-Euklidische Geometrie des Minkowski-Raums der Speziellen Relativitätstheorie. Diese Parallelität ist umso überraschender, als die komplexen Rotationen auf einen reellen sechsdimensionalen, die Lorentz-Transformationen dagegen auf einen vierdimensionalen Vektorraum wirken.

Vorsicht ist übrigens geboten mit dem Begriff der »komplexen Rotation«. Man ist leicht in Versuchung gebracht zu übersehen, daß eine Rotation um einen imaginären Winkel $\tau = it$, $t \in \mathbb{R}$, nicht periodisch ist. Aus diesem Grund vor allem geben sich Misner, Thorne und Wheeler (1973) in dem sehr drastisch titulierten Abschnitt *Farewell to ict* , p. 51, allgemein sehr kritisch gegenüber einer leichtfertigen Einführung komplexer Zahlen in die Lorentz-Geometrie. Jedoch spricht die formale Gleichheit von Minkowski- und \mathbb{C}^3 -Geometrie sehr dafür, die reellen Begriffe – wenn auch mit allem notwendigen Bedacht – komplex zu erweitern.

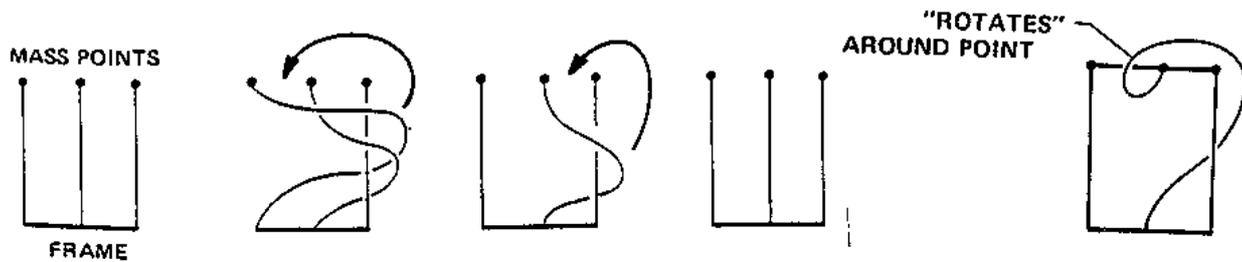


Fig. 1. Die Undurchdringbarkeit des Körpers ist wesentlich für die Nichtentwirrbarkeit der Bänder nach einer Rotation um 2π . Aus: Biedenharn und Louck (1981)

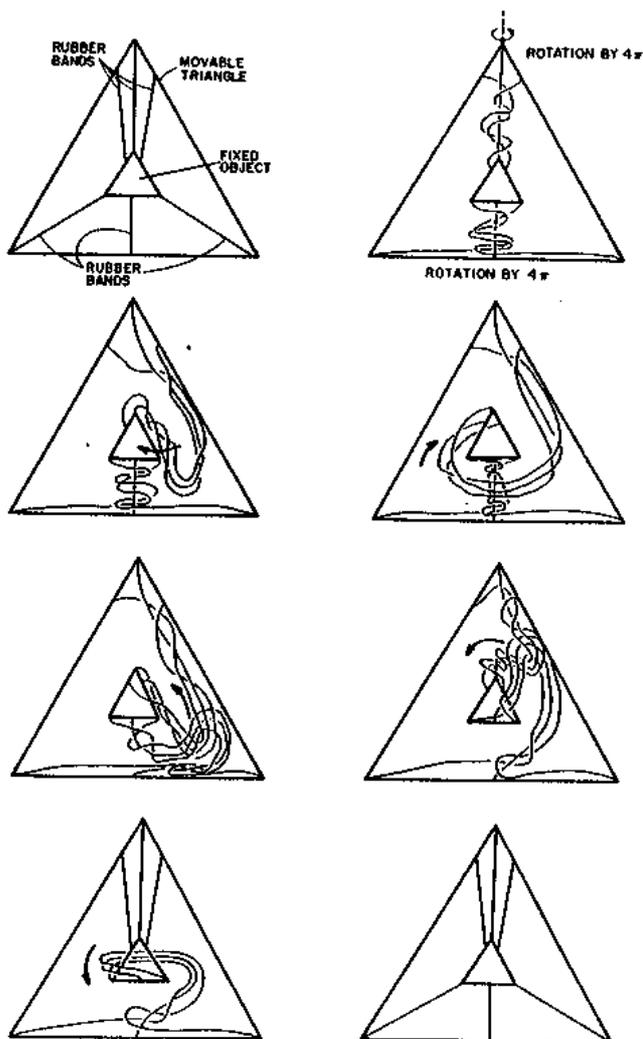


Fig. 2. Diracs Konstruktion. Nach einer Rotation um 4π sind die Bänder entwirrbar: $R(4\pi) = R(0)$. Eine Drehung um 4π ist homotop zur Identität. Aus Biedenharn und Louck (1981)

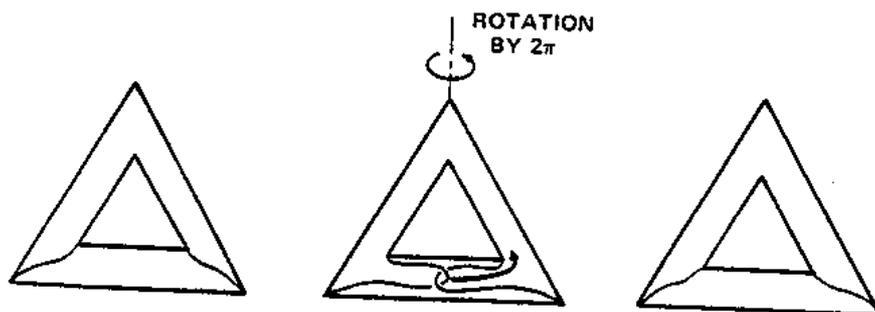


Fig. 3. Eine Rotation um 2π bei nur zwei Bändern ist entwirrbar. Aus Biedenharn und Louck (1981)

Bemerkt sei noch, daß das Ergebnis der Diracschen Konstruktion sorgfältig unterschieden werden sollte von dem gleichen Rotationsverhalten der *Spinoren*, mit deren Hilfe mathematisch die Elementarteilchen beschrieben werden können. Wie wir gesehen haben, sind Spinoren Punktobjekte, im Gegensatz zu einem festen Körper endlicher Ausdehnung. Doch sollte diese Übereinstimmung des Transformationsverhaltens beider Objekttypen tatsächlich vollkommen zufällig sein? Ist es nicht naheliegend, in dem exakt gleichen Symmetrieverhalten von Elementarteilchen und (makroskopischen) festen Körpern einen tieferen Zusammenhang zu sehen, letztendlich eine Bestätigung des naturwissenschaftlichen Ansatzes, universell gültige Gesetze zu finden?

1.6. Das Pauli-Prinzip

Euclid forbids superposing identical fermions.
R. W. Hartung (1979)

Bose-Fermi-Alternative. In der Quantenmechanik ist der Hilbert-Raum der Zustandsvektoren eines N -Teilchen-Systems das N -fache Tensorprodukt der Ein-Teilchen Hilbert-Räume, solange die Teilchen verschieden sind. Für N identische — d. h. ununterscheidbare — Teilchen dagegen gilt das Prinzip der Permutationssymmetrie: Zwei Zustandsvektoren ψ_1 und ψ_2 , die sich durch eine Permutation der Teilchen ineinander transformieren lassen, beschreiben denselben physikalischen Zustand, d. h. es gilt $\psi_2 = z\psi_1$ für ein $z \in \mathbb{C}$.

Um also alle Transformationen der Zustandsvektoren zu bestimmen, müssen wir mathematisch alle eindimensionalen Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_N bestimmen, der Permutationsgruppe der Menge $\{1, \dots, N\}$. Betrachten wir eine allgemeine Darstellung D der symmetrischen Gruppe S_N in dem Darstellungsraum \mathbb{C} , d. h. einer Abbildung $D: S_N \rightarrow \text{End}(\mathbb{C})$, für die gilt:

$$D(\sigma_1\sigma_2) = D(\sigma_1)D(\sigma_2) \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in S_N, \quad (1.73)$$

und

$$D(\varepsilon) = 1, \quad (1.74)$$

wobei ε das neutrale Element von S_N bezeichnet.

1.6.1. Satz. Es gibt nur zwei eindimensionale Darstellungen $D: S_N \rightarrow \mathbb{C}$ der symmetrischen Gruppe S_N :

- 1.) $D(\sigma) = 1;$
- 2.) $D(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \sigma \text{ gerade,} \\ -1, & \text{wenn } \sigma \text{ ungerade ist.} \end{cases}$

Beweis. Der Beweis ist einfach, wenn man voraussetzt, daß jede Permutation $\sigma \in S_N$ ein (wenn auch nicht eindeutiges) Produkt von Transpositionen ist, z. B. Scheja und Storch (1980), Satz 44.4 [p. 339], oder Armstrong (1988), Theorem (6.1) [p. 28] (Man beachte die Analogie zu den orthogonalen Gruppen, s. o.!). Da jedoch eine beliebige Transposition τ involutiv ist, $\tau^2 = \varepsilon$, gilt, wegen (1.73) und

(1.74), $D(\tau)^2 = D(\tau^2) = D(\varepsilon) = 1$, also $D(\tau) = \pm 1$. Da eine gerade Permutation das Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen ist, und entsprechend eine ungerade das Produkt einer ungeraden Anzahl, folgt die Behauptung. \square

Genügt eine Teilchenart der ersten («symmetrischen») der beiden möglichen eindimensionalen Darstellungen, so heißen die entsprechenden Teilchen *Bosonen* und gehorchen der *Einstein-Bose-Statistik*, genügt sie der zweiten («antisymmetrischen») Darstellung, so heißen die Teilchen *Fermionen* und gehorchen der *Fermi-Dirac-Statistik*, vgl. Haag (1992) [pp. 36]. Die Fermi-Dirac-Statistik hat jedoch zur Konsequenz, daß zwei Teilchen sich nicht im selben Zustand befinden können, denn sonst ergäbe eine Vertauschung (Transposition!) der beiden Teilchen ja denselben Gesamtzustand, im Widerspruch zu der antisymmetrischen Darstellung. Man sagt daher auch, daß Fermionen dem *Paulischen Ausschließungsprinzip* unterliegen.

Üblicherweise wird das Pauli-Prinzip mittels des Spin-Statistik-Theorems (Haag, 1992, p. 97) hergeleitet, das besagt, daß Teilchen mit $1/2$ -zahligem Spin der Fermi-Dirac-Statistik genügen, während Teilchen mit ganzzahligem Spin der Bose-Einstein-Statistik unterliegen. Hartung (1979) schlug eine geometrische Begründung vor:

Sei

$$E(n, \mathbb{C}) := \{f: \text{Aut}(\mathbb{C}^n) \mid (f(x), f(y)) = (x, y) \ \forall x, y \in \mathbb{C}^n\}$$

die *Euklidische Gruppe*.

6.2. Definition. Ein *doppelt involutorischer Austausch* zweier Punktemengen $X, Y \subset \mathbb{K}^n$ ist ein Paar (f, f^{-1}) , wobei $f \in E(n, \mathbb{K})$ und $Y = f(X)$ gilt.

6.3. Austauschatz (Hartung 1979). Ein doppelt involutorischer Austausch (f, f^{-1}) zweier identischer Mengen, d. h. $f(X) = X$, ist äquivalent einer Rotation um 2π .

Für zwei identische spinorielle Objekte ist ein Austausch also gleich einer 2π -Rotation, diese aber nicht äquivalent zur Identität. Dieser Widerspruch führt zu der Konsequenz:

Spinorielle Objekte können nie im identischen Zustand sein (Pauli-Prinzip).

Anhang: Die eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen

Die Gruppe der Rotationen $SO(3) = SO(3, \mathbb{R})$ wird erzeugt von den drei Rotationen

$$S_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad S_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad S_3(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\varphi \in [0, 2\pi)$, wobei $S_\alpha(\varphi)$ eine Rotation um die x^α -Achse um den Drehwinkel φ ist ($\alpha = 1, 2, 3$). Analog erzeugen $S_\alpha(\tau)$, $i = 1, 2, 3$, $\tau = \vartheta + it$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, $t \in \mathbb{R}$, die Gruppe $SO(3, \mathbb{C})$ der komplexen Rotationen.

Schärfer kann man formulieren, daß zu jedem $A \in SO(3) = SO(3, \mathbb{R})$ eindeutige $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in [0, 2\pi)$, die *Eulerschen Winkel*, existieren, so daß $A = S_3(\varphi_1)S_1(\varphi_2)S_3(\varphi_3)$ ist. $SO(3)$ wird durch $S_1(\vartheta)$ und $S_3(\vartheta)$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, erzeugt; siehe Hein (1990).

Sei $G = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ mit p positiven und q negativen Einträgen, und sei $O(p, q) = \{A \in M(p+q, \mathbb{R}) \mid A^t G A = G\}$ wie oben definiert. Sind $S \in M(p, \mathbb{R})$, $T \in M(q, \mathbb{R})$, $X \in M(p \times q, \mathbb{R})$ und $Y \in M(q \times p, \mathbb{R})$ Matrizen, so ergibt eine leichte Rechnung

$$\begin{bmatrix} S & X \\ Y & T \end{bmatrix} \in O(p, q) \Leftrightarrow S^t S = 1 + Y^t Y, \quad T^t T = 1 + X^t X, \quad S^t X = Y^t T$$

Seien weiter die Untergruppen $SO(p, q) = \{A \in O(p, q) \mid \det A = 1\}$ (s. o.) und $SO^+(p, q) = \left\{ \begin{bmatrix} S & X \\ Y & T \end{bmatrix} \in SO(p, q) \mid \det S > 0, \det T > 0 \right\}$ definiert. Für $p, q \geq 1$ ist $SO^+(p, q)$ die Zusammenhangskomponente des Einselements in $O(p, q)$. Insbesondere ist $SO^+(p, q)$ Normalteiler in $O(p, q)$ und in $SO(p, q)$, vgl. Hein (1990).

Es gilt $SO^+(1, q)/SO(q, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^q$, siehe Dubrovin, Fomenko und Novikov (1985), p. 57. Insbesondere ist $SO^+(1, q) \cong SO(q) \times \mathbb{R}^q$, da dies ein triviales Prinzipalbündel über \mathbb{R}^q ist. Speziell für $q = 3$ ist dies die Gruppe der *eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen*, und es gilt

$$SO^+(1, 3) \cong SO(3) \times \mathbb{R}^3$$

(An dieser Stelle sei bemerkt, daß $SO(4) \cong SO(3) \times S^1$, vgl. Dubrovin *et al.*, 1985). Es gilt

$$SO^+(1, 3) = \left\{ \begin{bmatrix} \gamma & \mathbf{x}^t \\ \mathbf{y} & D \end{bmatrix} \in SO(1, 3) \mid \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \geq 1 \right\}.$$

Jede Lorentz-Transformation läßt sich nach der obigen Eigenschaft aus γ , \mathbf{x} , \mathbf{y} und D bilden, die den Beziehungen $\gamma^2 = 1 + |\mathbf{y}|^2$, $D^t D = E + \mathbf{x}^t \mathbf{x}$ und $\gamma \mathbf{x} = \mathbf{y} D$ ($\mathbf{x}^t = (x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{y}^t = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3$) genügen. Es gilt

$$\gamma = \gamma(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathbf{x} = -\gamma \mathbf{v}, \quad \mathbf{y} = -\gamma R \mathbf{v}, \quad D = R + \frac{\gamma - 1}{v^2} (R \mathbf{v}) \mathbf{v}^t$$

für eine Rotation $R \in SO(3)$ und einen Vektor \mathbf{v} der Relativgeschwindigkeit, wobei v seinen Betrag bezeichnet, vgl. Sexl und Urbantke (1975).

Die speziellen Lorentz-Transformationen

$$B_1(t) = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2(t) = \begin{bmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_3(t) = \begin{bmatrix} \cosh t & 0 & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & 0 & \cosh t \end{bmatrix}$$

für ein $t \in \mathbb{R}$ heißen *Lorentz-Boosts* in x^1 -, x^2 - bzw. x^3 -Richtung; s. Hein (1990). Newtonsch gesehen ist $B_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, 3$, angewandt auf ein Bezugssystem (Teilchen

etc.) für einen Beobachter im Nullpunkt eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $v = cx^\alpha/x^0 = c \sinh t / \cosh t = c \tanh t$ in x^α -Richtung. Mit $\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$ folgt sofort $\tanh^2 t < 1 \forall t$, d. h. $v^2 < c^2$. Ein Bezugssystem bewegt sich also relativ zu einem anderen mit einer Geschwindigkeit v , die immer kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit.

Graphisch kann man einen Lorentz-Boost um den Geschwindigkeitsparameter $t \in \mathbb{R}$ in der (x^0, x^α) -Ebene und eine Rotation in der (x^α, x^β) -Ebene um den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ jeweils als Drehung darstellen, wobei $\vartheta \in [0, 2\pi)$ der Winkel mit $\tan \vartheta = \tanh t$ ist:

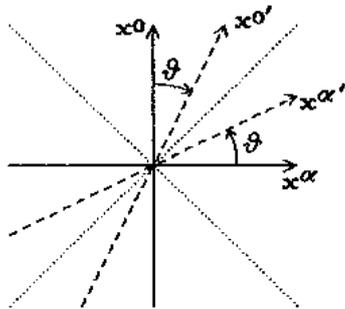


Fig. A 2a. Lorentz-Boost, $\tan \vartheta = \tanh t = \beta$

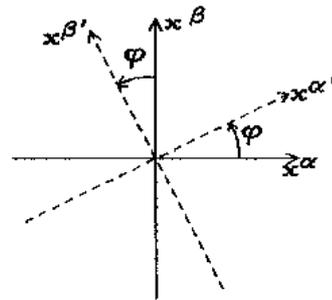


Fig. A 2b. Rotation um den Winkel φ .

Beachte, daß in Fig. A 2a wegen $|\tanh t| < 1$ folgt: $|\vartheta| < \frac{\pi}{4}$. Mit den Parametern $\beta := \tanh t = \tan \vartheta = v/c$ (Geschwindigkeit) und $s := \tan \varphi$ (Neigung) gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sinh t &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \sin \varphi &= \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, \\ \cosh t &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma, & \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \end{aligned}$$

und für die Kombination zweier Boosts bzw. Rotationen in derselben Ebene

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad \text{oder} \quad t = t_1 + t_2, \quad \text{bzw.} \quad s = \frac{s_1 + s_2}{1 - s_1 s_2} \quad \text{oder} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Näheres zu den eigentlichen Lorentztransformationen siehe u. a. Gel'fand, Minlos und Shapiro (1963), O'Neill (1983), Hein (1990), Srinivasa Rao (1988), Misner, Thorne und Wheeler (1973).

Literatur

- Armstrong, M. A. (1988). *Groups and Symmetry*. Springer-Verlag, New York.
- Artin, E. (1965). *Geometric Algebra*. Interscience Publishers, New York.
- Atiyah, M. F., Bott, R., and Shapiro, A. (1964). Clifford modules. *Topology* **3**, Suppl. 1, 3-38.
- Bachmann, Friedrich (1973). *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. Springer-Verlag, Berlin.
- Biedenharn, L. C., and Louck, James D. (1981). *Angular Momentum in Quantum Physics: Theory and Application*. Encyclopedia of mathematics and its applications; v. 8. Addison-Wesley Publishing Company, Reading.
- Bröcker, Theodor, and tom Dieck, Tammo (1985). *Representations of Compact Lie Groups*. Springer-Verlag, New York.
- Carmeli, Moshe (1977). *Group Theory and General Relativity*. McGraw-Hill, New York.
- Cartan, Élie (1938). *Leçons sur la théorie des spineurs. I. Les spineurs de l'espace à trois dimensions*. Hermann, Paris.
- Dickson, L. F. (1914). *Linear Algebras*. Hafner Publishing Co, New York.
- tom Dieck, Tammo (1991). *Topologie*. Walter de Gruyter, Berlin.
- Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T., and Novikov, S. P. (1984). *Modern Geometry – Methods and Applications. Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*. Springer-Verlag, New York.
- Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T., and Novikov, S. P. (1985). *Modern Geometry – Methods and Applications. Part II. The Geometry and Topology of Manifolds*. Springer-Verlag, New York.
- Fischer, Wolfgang, und Lieb, Ingo (1983). *Funktionentheorie. 3. Auflage*. Friedrich Vieweg Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig.
- Fulton, William, und Harris, Joe (1991). *Representation Theory. A First Course*. Springer-Verlag, New York.
- Gel'fand, I. M., Minlos, R. A., und Shapiro, Z. Ya. (1963). *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications*. Pergamon Press, Oxford.
- Gunning, Robert C. (1990). *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables. Vol. 1. Function Theory*. Wadsworth, Inc., Belmont.
- Haag, Rudolf (1992). *Local Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras*. Springer-Verlag Berlin.
- Hartung, R. W. (1979). Pauli principle in Euclidean geometry. *Am. J. Phys.* **47**, 10, 900-910.
- Hein, Wolfgang (1990). *Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen*. Springer-Verlag, Berlin.
- Klein, Felix, und Sommerfeld, Arnold (1897). *Über die Theorie des Kreisels*. Nachdruck von 1965 der Erstauflagen von 1897/1898/1903/1910. Teubner, Stuttgart.
- Milnor, J. (1963). Spin structures on manifolds. *L'Enseignement Mathématiques* **9**, Ser. II, 198-203.

- Misner, Charles W., Thorne, Kip S., und Wheeler, John Archibald (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman and Co., San Francisco.
- O'Neill, Barret (1983). *Semi-Riemannian Geometry*. Academic Press, New York.
- Penrose, Roger, und Rindler, Wolfgang (1984). *Spinors and Space-Time. Vol. 1. 2-Spinor Calculus and Relativistic Fields*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Ryder, Lewis H. (1985). *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Scheja, Günter, und Storch, Uwe (1980). *Lehrbuch der Algebra. Unter Einschluß der linearen Algebra. Teil 1*. Teubner, Stuttgart.
- Sextl, Roman U., und Urbantke, Helmuth K. (1976). *Relativität, Gruppen, Teilchen*. Springer-Verlag, Wien.
- Srinivasa Rao, K. N. (1988). *The Rotation and Lorentz Groups and their Representation for Physicists*. John Wiley & Sons, New Delhi.
- Stöcker, Ralf, und Zieschang, Heiner (1988). *Algebraische Topologie*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- Strubecker, Karl (1969). *Differentialgeometrie. III. Theorie der Flächenkrümmung*. Sammlung Göschen, Walter de Gruyter, Berlin.
- Switzer, Robert M. (1975). *Algebraic Topology—Homotopy and Homology*. Springer-Verlag, Berlin.

To a very high degree of accuracy, the space-time we inhabit can be taken to be a smooth four-dimensional manifold, endowed with the smooth Lorentzian metric of Einstein's special or general relativity. The formalism most commonly used for the mathematical treatment of manifolds and their metric is, of course, the tensor calculus (...). But in the specific case of four dimensions and Lorentzian metric there happens to exist - by accident or by providence - another formalism which is in many ways more appropriate, and that is the formalism of 2-spinors. (...)

Spinor calculus may be regarded as applying at a deeper level of structure of space-time than that described by the standard world-tensor calculus. By comparison world-tensors are less refined, fail to make transparent some of the subtler properties of space-time brought particularly to light by quantum mechanics and, not least, make certain types of mathematical calculations inordinately heavy. (...)

Spinors seem to have profound links with the complex numbers that appear in quantum mechanics ...

[p. vii]

Spinor differential equations arise most naturally in quantum theory, where it is presumed - from the theory of group representations and from requirements of Lorentz invariance and linear superposition of states - that the basic equations for (free) particles are *linear* spinor laws. On translation, these usually become *non-linear* tensor laws. Thus the attempt to regard the tensor laws, and the tensors occurring in them, as fundamental, would negate the whole standard *linear* character and formalism of quantum theory.

[p. 220]

But we may ask whether Nature is really so complicated. (...) If, as we shall tend to do in this book, one regards the spin-vectors as more basic than the world-vectors, (...) if we *start* from spinors, we have no sign ambiguity (since the signs are part of the given structure, not something that has to be derived). The resulting space-time is *automatically* time- and space-oriented and has spin-structure. (...). Even the dimension and the signature of space-time are 'consequences' of our particular spinor formalism. The spinor algebra has *in itself* a certain simplicity. The complications always seem to arise when we try to interpret the spinor operations in space-time terms.

[p. 118]

(...) We can choose the axiomatic approach. Here we simply postulate the algebraic requirements for the spinor system. The space-time structure, e.g. metric, signature, topological requirements, are then thought of as *derived* properties. (...) The existence of the spinor algebra might be regarded as providing a 'deeper' reason for the particular space-time structure that arises.

[p. 212]

Roger Penrose and Wolfgang Rindler. *Spinors and Space-Time. Vol. 1. 2-Spinor Calculus and Relativistic Fields*. Cambridge University Press, Cambridge 1984.